به نام الله آ ن سکوت گویا

ضمن شکر خدای منان که در همه حال یار ویاورم بوده که به وسع توان خادم جامعه آموزشی باشم ، جهت درس معادلات دیفرانسل کارشناسی کامپیوتر به وسع توان دانشجویان رشته های فنی و حرفه ای مطالبی را از منابع مختلف گردآوری نموده ام ، امید است که مثمر ثمر باشد .

با احترام : مظفر غربی (سنندج ۷-۱۰ – ۹۵)

Day. Month. Year. Subject.

معادلات دیفرانسیل

معادله دیفرانسیل: یک رابطه بین تابع y و مشتقات مراتب مختلف آن را معادله دیفرانسیل می نامیم

$$y + y' = 0$$

$$y = e^{-x} \,,\; y' = -e^{-x} \Rightarrow y + y' = 0$$

$y = e^{-x}$ جواب خصوصی $y = ce^{-x}$ جواب عمومی (بدلیل داشتن پارامتر c)

اگر x و y معلوم باشند می توان مقدار پارامتر c را بدست آورد و این مقادیر را شرایط اولیه گویند.

مرتبه درجه

بزرگترین مرتبه ای که مشتق یک تابع در یک معادله دیفرانسیل دارد آن مرتبه را مرتبه معادله دیفرانسیل گوییم

۱) $y + y' = 0$ مرتبه ۱ $(y = e^{-x})$

۲) $y + y' = 2y''$ مرتبه ۲ $(y = e^{x})$

۳) $y + y''' = 0$ مرتبه ۳ $(y = e^{-x})$

ILIA GRAPHIC

۴

Day. Month. Year. Subject.

درجه : توان بزرگترین مشتق یک معادله دیفرانسیل را درجه آن معادله دیفرانسیل نامند

$y + y' = 0$ مرتبه ۱ و درجه ۱

$y + (y'')^2 + y' = 0$ مرتبه ۲ و درجه ۲

$y + y''' = (y')^2$ مرتبه ۳ و درجه ۱

معادلات دیفرانسیل به دو دسته تقسیم می‌شوند اگر تابع فقط یک متغیر مستقل داشته باشد معادله دیفرانسیل را معمولی نامند و اگر بیش از یک متغیر داشته باشد آن را معادله دیفرانسیل نسبی یا معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی می‌نامند.

$y' = 3$

$y'' + 3(y')^2 + \cos x = 4$ معمولی

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x,y)}{\partial y \, \partial x}$$ نسبی

تعریف : منظور از حل معادله دیفرانسیل یافتن تابعی صریح یا ضمنی است که خود و مشتقات آن در معادله صدق کند جواب معادله دیفرانسیل در صورت

Day. Month. Year. Subject.

وجود تابعی منحصر بفرد است که دارای n ثابت دلخواه (به اندازه مرتبه معادله دیفرانسیل) می‌باشد. این تابع را جواب عمومی معادله دیفرانسیل می‌نامند. چنانچه مقدار تابع و بعضی از مشتقات آن را در یک نقطه، در اختیار داشته باشیم به این داده‌ها شرایط اولیه می‌نامند. و با تشکیل یک دستگاه از معادلات می‌توان مقادیر ثابت را مشخص و به یک تابع خاص رسید این تابع را جواب خصوصی معادله دیفرانسیل با شرایط اولیه داده شده می‌گوییم.

تذکر: بعضی از معادلات دیفرانسیل ممکن است جواب نداشته باشند مانند

$$|y'|+3=0$$

مثال:

۱) تابع $y=\ln x+c$ جواب معادله $y'=\frac{1}{x}$ در فاصله $(0,+\infty)$ است

۲) تابع $y=ce^x$ جواب عمومی معادله $y'-y=0$ می‌باشد

۳) تابع ضمنی $x^2+y^2=c$ جواب عمومی $yy'=-x$ می‌باشد

Day. Month. Year. Subject.

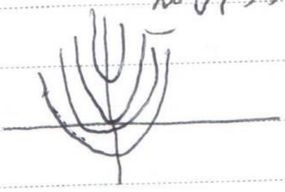
مثال: به سادگی می‌توان تحقیق کرد که تابع $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{x}$ جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'' + y' - 2y = 0$ می‌باشد و با شرایط اولیه $y(0) = 2$ و $y'(0) = 1$ جواب خصوصی معادله دیفرانسیل را بیابید.

$$y' = -2c_1 e^{-2x} + c_2 e^{x}$$

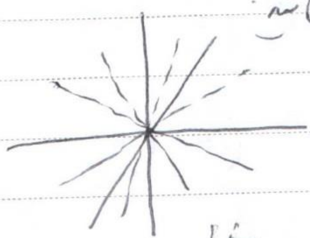
$$\begin{cases} y(0) = c_1 + c_2 = 2 \\ y'(0) = -2c_1 + c_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{1}{3} \\ c_2 = \frac{5}{3} \end{cases}$$

$$y = \frac{1}{3} e^{-2x} + \frac{5}{3} e^{x}$$ جواب خصوصی

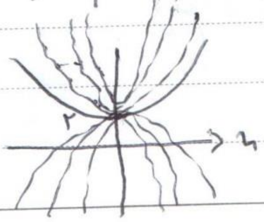
مثال: دسته منحنی $y = x^2 + c$ را رسم نمائید.



مثال: دسته منحنی $y = cx$ را رسم نمائید.



مثال: دسته منحنی $y = cx^2 + 2$ را رسم نمائید.



Day. Month. Year. Subject.

نکته: معادله‌ای که فاقد پارامتر c باشد معادله دیفرانسیل نامند

مثال: معادله دیفرانسیل $y=x^2+c$ را تعیین نمایید.

$y'=2x$ (فاقد متغیر c)

مثال: معادله دیفرانسیل دسته منحنی $y=cx$ را تعیین نمایید.

$$\begin{cases} y'=c \\ y=cx \Rightarrow y=y'x \end{cases}$$ یا $y'=\dfrac{y}{x}$

مثال: معادله دیفرانسیل دسته منحنی $y=cx^2+2$ را تعیین نمایید.

$$y'=2cx \Rightarrow c=\frac{y'}{2x}$$

$$y=\left(\frac{y'}{2x}\right)(x^2)+2 \Rightarrow y=\frac{y'x}{2}+c$$

اگر دسته منحنی به بیش از یک پارامتر مستقل داشته باشد $y=F(x,c_1,c_2,\dots,c_n)$ برای تشکیل معادله دیفرانسیل آن باید n پارامتر را بین $n+1$ معادله در دستگاه زیر حذف کرد

$$y=F(x,c_1,c_2,\dots,c_n)$$
$$y'=F'_x(x,c_1,c_2,\dots,c_n)$$
$$y''=F''_{x^2}(x,c_1,c_2,\dots,c_n)$$
$$\vdots$$
$$y^{(n)}=F^{(n)}_{x^n}(x,c_1,c_2,\dots,c_n)$$

که نتیجه یک معادله دیفرانسیل مرتبه n خواهد بود

Day. Month. Year. Subject.

مثال: معادله دیفرانسیل دسته منحنی زیر را تعیین نمائید.

$y = 2x^2 + c_1 x + c_2$

$y' = 4x + c_1$

$y'' = 4$ (جواب مطلوب $y'' = 4$)

مثال: معادله دیفرانسیل دسته منحنی زیر را تعیین نمائید.

$$\begin{cases} y = c_1 e^x + c_2 x e^x \\ y' = c_1 e^x + c_2 e^x + c_2 x e^x \\ y'' = c_1 e^x + c_2 e^x + c_2 e^x + c_2 x e^x \end{cases} \Rightarrow y'' - 2y' = -c_1 e^x - c_2 x e^x$$

$y'' = c_1 e^x + 2c_2 e^x + c_2 x e^x$

$$y'' - 2y' = -(c_1 e^x + c_2 x e^x) = -y$$

$$y'' - 2y' + y = 0$$

مثال: آیا $y = 2e^{-4x}$ یک جواب معادله $y' + 4y = 0$ است

$y' = -8e^{-4x}$

$(-8e^{-4x}) + 4(2e^{-4x}) = 0$

Day. Month. Year. Subject.

مثال : آیا $y=3\cos 2x+\sin 2x$ یک جواب معادله دیفرانسیل $y''+4y=0$ است؟

$$y'=-6\sin 2x+2\cos 2x$$

$$y''=-12\cos 2x-4\sin 2x$$

$$y''+4y=(-12\cos 2x-4\sin 2x)+4(3\cos 2x+\sin 2x)=0$$

مثال : آیا $y=-\cos x-5$ و $y=-\cos x+2$ و $y=-\cos x$ و ...

$y=-\cos x+c$ یک جواب معادله دیفرانسیل $y'=\sin x$ است؟

جواب : بله (در تمام حالات $y'=\sin x$)

$y=-\cos x+c$ یک جواب عمومی معادله دیفرانسیل است، اما اگر فرض کنیم

منحنی جواب از نقطه $(0,1)$ می‌گذرد یعنی $f(0)=1$

$$f(x)=-\cos x+c \Rightarrow f(0)=-\cos(0)+c=1 \Rightarrow c=2$$

یک $\boxed{y=-\cos x+2}$ جواب خصوصی معادله دیفرانسیل است

جواب خصوصی ، جوابی است که بدون پارامتر دلخواه c از جواب عمومی به دست می‌آید

فقط بایستی پارامتر را حذف کرد.

ILIA GRAPHIC

Day. Month. Year. Subject.

تعریف : جواب "غیرعادی" معادله دیفرانسیل ، جوابی است که منحنی نمایش آن بر تمام منحنی ها جواب عمومی مماس باشد

مثال: اولاً: نشان دهید $(x-c)^2+y^2=4$ جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y^2(1+y'^2)=4$ است

ثانیاً: دسته نمودار جواب عمومی را رسم نمائید.

ثالثاً: آیا معادله دارای جواب غیرعادی می باشد.

اولاً:

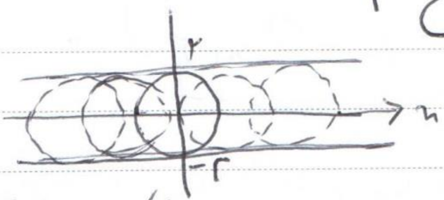
$$(x-c)^2+y^2=4$$

$$2(x-c)+2yy'=0 \Rightarrow y'=-\frac{x-c}{y}$$

$$y^2(1+y'^2)=y^2\left(1+\left(-\left(\frac{x-c}{y}\right)\right)^2\right)=$$

$$y^2\left(1+\frac{(x-c)^2}{y^2}\right)=y^2\left(\frac{\overbrace{y^2+(x-c)^2}^{4}}{y^2}\right)=4$$

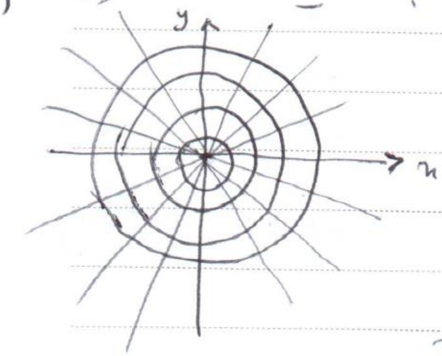
ثانیاً: با تغییر c دسته دایره بدست می آید که مرکز آنها بر محور xها واقع هستند ، شعاع ۲



ثالثاً: خطوط $y=2$ و $y=-2$ بر دایره ها فوق مماس هستند که جوابهای غیر عادی معادله می باشند

Day. Month. Year. Subject.

مسیرهای قائم: دو دسته منحنی $x^2+y^2=c$ و $y=mx$ را بررسی می‌نماییم ملاحظه می‌کنیم که هر منحنی از یک دسته با کلیه منحنی‌های دسته دیگر عمود می‌باشد، هرگاه چنین ارتباطی بین دو دسته منحنی برقرار باشد، یک دسته را مسیرهای قائم دسته‌های دیگر می‌نامیم.



سؤال

روش بدست آوردن مسیرهای قائم یک دسته منحنی

ابتدا معادله دیفرانسیل مسیر اصلی را پیدا می‌کنیم، سپس در این معادله بجای y' ، $-\frac{1}{y'}$ قرار می‌دهیم تا معادله دیفرانسیل قائم بدست آید آنگاه معادله دیفرانسیل مسیر قائم را حل می‌کنیم، دسته منحنی مسیر قائم بدست می‌آید.

ILIA GRAPHIC

Day. Month. Year. Subject.

مثال: مسیرهای قائم دسته منحنی زیر را بدست آورید.

$$x^2+y^2=c$$

$$2x+2yy'=0 \Rightarrow y'=-\frac{x}{y}$$

تبدیل y' به $-\frac{1}{y'}$

$$-\frac{1}{y'}=-\frac{x}{y} \Rightarrow \frac{1}{y'}=\frac{x}{y} \Rightarrow \frac{1}{\frac{dy}{dx}}=\frac{x}{y}$$

$$\frac{dx}{dy}=\frac{x}{y} \Rightarrow \frac{dx}{x}=\frac{dy}{y} \Rightarrow \ln x+\ln m=\ln y$$

$$\ln mx=\ln y \Rightarrow y=mx$$

دسته منحنی مسیرهای قائم

۱۳

معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

صورت کلی این معادله به فرم $F(x,y,y')=0$ می‌باشد در این بخش حوالی معادله را وقتی که $y'=f(x,y)$ یا $x=f(y,y')$ ، $y=f(x,y')$ باشد ارائه میدهیم.

۱) معادلات تفکیک پذیر (متغیرها از هم جدا)

اگر داشته باشیم $f(x,y)=f_1(x)f_2(y)$ که در آن f_1 تابعی تنها از x و f_2 تابعی تنها از y باشد در اینصورت داریم

$$\frac{dy}{dx}=f_1(x)\,f_2(y)$$

یا

$$\frac{dy}{f_2(y)}=f_1(x)\,dx$$

یا بفرم کلی

$$(1)\qquad p(x)\,dx+q(y)\,dy=0$$

با انتگرال گیری از (۱) جواب عمومی بدست می‌آید

تذکر: برای حل معادلات مرتبه اول به فرم $y'=f(x,y)$ ابتدا مخرج‌ها را از بین می‌بریم و سپس معادله را بفرم زیر می‌نویسیم

$$(2)\qquad P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0$$

اگر (۲) بفرم $f_1(x)f_2(y)dx+f_3(x)f_4(y)dy=0$ باشد (۳) طرفین (۳) را در $\frac{1}{f_2(y)f_3(x)}$ ضرب می‌کنیم بفرم (۱) تبدیل شود.

Day. Month. Year. Subject.

مثال: معادله دیفرانسیل $y' = e^{x+y}$ را حل کنید.

$$y' = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^{x+y} = e^x \cdot e^y$$

$$\frac{dy}{e^y} = e^x dx \Rightarrow \int \frac{dy}{e^y} = \int e^x dx \Rightarrow$$

$$\int e^{-y} dy = \int e^x dx \Rightarrow -e^{-y} = e^x + c$$

$$e^x + e^{-y} + c = 0 \quad \text{یا} \quad e^x + e^{-y} = C$$

مثال: معادله دیفرانسیل $y' \cot x = 2 + y$ را حل کنید.

$$\frac{dy}{dx} \cot x = 2 + y \Rightarrow \frac{dy}{2+y} = \frac{dx}{\cot x} \Rightarrow \frac{dy}{2+y} = \tan x dx$$

$$\int \frac{dy}{2+y} = \int \tan x dx \Rightarrow \ln|2+y| = -\ln|\cos x| + c$$

$$\ln|2+y| + \ln|\cos x| = \ln c$$

$$\ln|2+y| = \ln c - \ln|\cos x| = \ln\left|\frac{c}{\cos x}\right|$$

$$\ln|2+y| = \ln c|\sec x| \quad \text{فرض شده } c > 0$$

$$2 + y = c \sec x$$

ILIA GRAPHIC

Day. Month. Year. Subject.

مثال : معادله دیفرانسیل $y' = \dfrac{x(1+y)}{y(x+2)}$ را حل نمائید

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x(1+y)}{y(x+2)} \Rightarrow \frac{y}{1+y}dy = \frac{x}{x+2}dx$$

$$\frac{(1+y)-1}{1+y}dy = \frac{(x+2)-2}{x+2}dx \Rightarrow 1\,dy - \frac{1}{1+y}dy = 1\,dx - \frac{2}{x+2}dx$$

$$y - \ln|1+y| = x - 2\ln|x+2| + c$$

مثال : معادله دیفرانسیل $y' = \dfrac{1+y^2}{xy(1+x^2)}$ را حل کنید

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{xy(1+x^2)} \Rightarrow \frac{y\,dy}{1+y^2} = \frac{dx}{x(1+x^2)} \quad (1$$

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+D}{1+x^2} = \frac{A+Ax^2+Bx^2+Dx}{x(1+x^2)}$$

$$= \frac{A+x^2(A+B)+Dx}{x(1+x^2)} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ A+B=0 \Rightarrow B=-1 \\ D=0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}$$

ILIA GRAPHIC

Day. Month. Year. Subject.

$$\int \frac{y}{1+y^2}\,dy = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

$$\frac{1}{2}\ln(1+y^2) = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + \ln c$$

طرفین را در ۲ ضرب می‌کنیم

$$\ln(1+y^2) = 2\ln|x| - \ln|1+x^2| + 2\ln c$$

$$\ln(1+y^2) = \ln x^2 - \ln|1+x^2| + \ln C$$

$$\ln(1+y^2) = \ln \frac{Cx^2}{1+x^2} \Rightarrow 1+y^2 = \frac{Cx^2}{1+x^2}$$

نکته : معادلات نوع $y' = f(ax+by+c)$ را می‌توان با استفاده از تغییر متغیر زیر تبدیل به نوع متغیرها از هم جدا کرد.

$$u = ax + by + c \qquad (1)$$

$$u' = a + by'$$ مشتق (1) نسبت به x

$$\hookrightarrow y' = \frac{1}{b}(u' - a)$$

$$\frac{1}{b}(u' - a) = f(u) \Rightarrow u' = bf(u) + a = h(u)$$

$$\frac{du}{dx} = h(u) \Rightarrow \frac{du}{h(u)} = dx$$

Day. Month. Year. Subject.

مثال: معادله دیفرانسیل $y' = \tan(x+y) - 1$ را حل کنید.

$$u = x+y \Rightarrow u' = 1 + y' \Rightarrow y' = u' - 1$$

$$u' - 1 = \tan u - 1 \Rightarrow u' = \tan u \Rightarrow \frac{du}{dx} = \tan u$$

$$\frac{du}{\tan u} = dx \Rightarrow \cot u\, du = dx \Rightarrow \int \cot u\, du = \int dx$$

$$\ln|\sin u| = x + c_1 \Rightarrow \sin u = e^{x+c_1} = e^{c_1} \cdot e^x$$

عدد c

$$\sin u = C e^x$$

$$u = \operatorname{Arc}\sin C e^x$$

$$x + y = \operatorname{Arc}\sin C e^x \Rightarrow y = -x + \operatorname{Arc}\sin C e^x$$

مثال: معادله دیفرانسیل $y' = 1 + \frac{1}{x-y}$ را حل کنید.

$$u = x - y \Rightarrow u' = 1 - y' \Rightarrow y' = 1 - u'$$

$$1 - u' = 1 + \frac{1}{u} \Rightarrow -u' = \frac{1}{u} \Rightarrow -\frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \Rightarrow u\,du = -dx$$

$$\int u\,du = \int -dx \Rightarrow \frac{1}{2}u^2 = -x + c \Rightarrow u^2 = -2x + C$$

$$(x-y)^2 = -2x + C$$

ILIA GRAPHIC

Day. Month. Year. Subject.

تعریف : تابع $f(x,y)$ را همگن از درجه n گوییم اگر

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y)$$

مثال : نشان دهید تابع زیر همگن از درجه ۳ است

$$f(x,y) = x^3 + 3xy^2 + 4y^3$$

$$\begin{aligned} x &\to \lambda x \\ y &\to \lambda y \end{aligned} \Rightarrow f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^3 + 3(\lambda x)(\lambda y)^2 + 4(\lambda y)^3$$

$$= \lambda^3 (x^3 + 3xy^2 + 4y^3) = \lambda^3 f(x,y)$$

نشان دهید تابع زیر همگن از درجه ۱ است

$$f(x,y) = x \sin\frac{y}{x}$$

$$x \to \lambda x, \quad y \to \lambda y$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda x \sin\frac{\lambda y}{\lambda x} = \lambda x \sin\frac{y}{x} = \lambda f(x,y)$$

مثال : توابع $xe^{\frac{x}{y}}$ ، x^2+xy ، $\tan\frac{x}{y}$ ، $x+\sqrt{xy}$ به ترتیب همگن از درجه ۱، ۲، ۰، ۱ می‌باشند

xe^x ، x^2+y ، $xy+2$ ، $(x^2+y^2)\cos y$ همگن نیستند

Day. Month. Year. Subject.

تعریف : هر معادله دیفرانسیل به فرم $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ را

که در آن $P(x,y)$ و $Q(x,y)$ هر دو همگن از درجه n باشند

یک معادله همگن نامیده می‌شوند و برای حل این معادلات دیفرانسیل از

تغییر متغیر زیر استفاده می‌کنیم.

$y=vx$ یا $y=ux$

$dy=vdx+xdv$ یا $dy=udx+xdu$

با این تغییر متغیر معادله همگن تبدیل به نوع متغیرها از هم جدا می‌شود

مثال : معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید. $2xydy+(x^2-y^2)dx=0$

همگن از درجه ۲

$y=vx$ یا $y=ux$

$dy=vdx+xdv$ یا $dy=udx+xdu$

$$2x(ux)(udx+xdu)+(x^2-u^2x^2)dx=0$$

$$x^2(2u^2dx+2uxdu)+x^2(1-u^2)dx=0$$

طرفین را بر x^2 تقسیم می‌کنیم

$$(2u^2dx+2uxdu)+(1-u^2)dx=0$$

ILIA GRAPHIC

Day. Month. Year. Subject.

$$(2u^2 - u^2 + 1)\,dx + 2ux\,du = 0$$

$$(u^2 + 1)\,dx + 2ux\,du = 0$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{2u}{1+u^2}\,du = 0$$

$$\ln|x| + \ln(1+u^2) = \ln c$$

$$\ln x(1+u^2) = \ln c \Rightarrow x(1+u^2) = c$$

$$y = ux \Rightarrow u = \frac{y}{x}$$

$$x\left(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right) = c \Rightarrow x^2 + y^2 = cx$$

مثال: معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید $x(y-x)y' = y^2$

$$x(y-x)\frac{dy}{dx} = y^2$$ همگن درجه ۲

$$y^2\,dx = (xy - x^2)\,dy$$

$$y = ux \Rightarrow dy = u\,dx + x\,du$$

$$u^2x^2\,dx = (ux^2 - x^2)(u\,dx + x\,du)$$

طرفین را بر x^2 تقسیم می کنیم

$$u^2\,dx = (u-1)(u\,dx + x\,du)$$

Day. Month. Year. Subject.

$$\cancel{u^2 dx} = \cancel{u^2 dx} + ux\,du - u\,dx - x\,du$$

$$x(u-1)\,du = u\,dx \Rightarrow \frac{u-1}{u}\,du = \frac{dx}{x}$$

$$\left(1-\frac{1}{u}\right)du = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int\left(1-\frac{1}{u}\right)du = \int\frac{dx}{x}$$

$$u - \ln u = \ln x + \ln c$$

$$u = \ln u + \ln x + \ln c = \ln uxc$$

$$u = \ln uxc \Rightarrow uxc = e^{u}$$

$$\boxed{y = ux \Rightarrow u = \frac{y}{x}}$$

$$\left(\frac{y}{x}\right)(x)\,c = e^{\frac{y}{x}}$$

$$cy = e^{\frac{y}{x}} \quad \text{یا} \quad y = \frac{1}{c}\,e^{\frac{y}{x}}$$

$$\frac{1}{c} \to C$$

$$\boxed{y = Ce^{\frac{y}{x}}}$$

Day. Month. Year. Subject.

مثال: معادله دیفرانسیل $(x^3+y^3)dx+3xy^2dy=0$ را حل کنید.

همگن درجه ۳

$$y=ux$$
$$dy=udx+xdu$$

$$(x^3+u^3x^3)dx+3(x)(ux)^2(udx+xdu)=0$$

طرفین را بر x^3 تقسیم میکنیم

$$(1+u^3)dx+3u^2(udx+xdu)=0$$

$$(1+u^3+3u^3)dx+3u^2xdu=0$$

$$(1+4u^3)dx+3u^2xdu=0 \Rightarrow \frac{dx}{x}+\frac{3u^2}{1+4u^3}du=0$$

$$\int\frac{dx}{x}+\int\frac{3u^2}{1+4u^3}du=0 \Rightarrow$$

$$\ln x+\frac{1}{4}\ln(1+4u^3)=\ln c$$

$$4\ln x+\ln(1+4u^3)=4\ln c$$

$$\ln x^4+\ln(1+4u^3)=\ln C$$

$$\ln(x^4)(1+4u^3)=\ln c \Rightarrow x^4(1+4u^3)=c$$

$$x^4\left(1+4\left(\frac{y}{x}\right)^3\right)=c$$

$$x^4+\frac{4x^3y^3}{x^3}=c \Rightarrow x^4+4xy^3=c$$

Day. Month. Year. Subject.

مثال: معادله دیفرانسیل زیر را حل نمایید:

$$y' = \frac{y}{x+\sqrt{xy}}$$

همگن درجه ۱

$$y = ux \quad , \quad u = \frac{y}{x}$$

$$dy = u\,dx + x\,du$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+\sqrt{xy}} \Rightarrow \frac{u\,dx + x\,du}{dx} = \frac{ux}{x+\sqrt{x\,ux}} = \frac{u}{1+\sqrt{u}}$$

$$(1+\sqrt{u})(u\,dx + x\,du) = u\,dx$$

$$\cancel{u\,dx} + \underbrace{x\,du + u\sqrt{u}\,dx} + x\sqrt{u}\,du = \cancel{u\,dx}$$

$$x(1+\sqrt{u})\,du + u\sqrt{u}\,dx = 0$$

$$\frac{1+\sqrt{u}}{u\sqrt{u}}\,du + \frac{dx}{x} = 0$$

$$\int \frac{1+\sqrt{u}}{u\sqrt{u}}\,du + \int \frac{dx}{x} = 0 \Rightarrow \int \frac{1}{u\sqrt{u}}\,du + \int \frac{\sqrt{u}}{u\sqrt{u}}\,du + \int \frac{dx}{x} = 0$$

$$\int u^{-\frac{3}{2}}\,du + \int \frac{du}{u} + \int \frac{dx}{x} = 0$$

$$\frac{u^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + \ln u + \ln x = c$$

$$\ln x + \ln u - 2u^{-\frac{1}{2}} = c \Rightarrow \ln xu = c + \frac{2}{\sqrt{u}}$$

$$xu = e^{c+\frac{2}{\sqrt{u}}} \Rightarrow x\left(\frac{y}{x}\right) = e^{c+\frac{2}{\sqrt{\frac{y}{x}}}}$$

$$y = e^{c+2\sqrt{\frac{x}{y}}}$$

۲۴

Day. Month. Year. Subject.

مثال: معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}dx-\left(\frac{x}{y}\sin\frac{y}{x}+\cos\frac{y}{x}\right)dy=0$$

همگن درجه ۱

$$y=ux \Rightarrow dy=udx+xdu$$

$$\frac{ux}{x}\cos\frac{ux}{x}dx-\left(\frac{x}{ux}\sin\frac{ux}{x}+\cos\frac{ux}{x}\right)(udx+xdu)=0$$

$$u\cos u\,dx-\left(\frac{1}{u}\sin u+\cos u\right)(udx+xdu)=0$$

$$\cancel{u\cos u\,dx}-\sin u\,dx-\frac{x\sin u}{u}du-\cancel{u\cos u\,dx}-x\cos u\,du=0$$

$$\sin u\,dx+\frac{x\sin u}{u}du+x\cos u\,du=0$$

$$\sin u\,dx+x\left(\frac{\sin u}{u}+\cos u\right)du=0$$

طرفین را بر $x\sin u$ تقسیم می‌کنیم

$$\frac{dx}{x}+\frac{du}{u}+\frac{\cos u}{\sin u}du=0$$

$$\ln|x|+\ln|u|+\ln|\sin u|=\ln c$$

$$\ln(xu)(\sin u)=\ln c$$

$$xu\sin u=c \Rightarrow x\left(\frac{y}{x}\right)\sin\frac{y}{x}=c$$

$$y\sin\frac{y}{x}=c$$

ILIA GRAPHIC

Day. Month. Year. Subject.

مثال: معادله دیفرانسیل زیر را حل نمائید.

$$y' - \frac{y}{x} + \csc\frac{y}{x} = 0 \;,\; y(1) = 0$$

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} + \frac{1}{\sin\frac{y}{x}} = 0 \Rightarrow dy + \left(-\frac{y}{x} + \frac{1}{\sin\frac{y}{x}}\right)dx = 0$$

همگن درجه ۱

$$y = ux \Rightarrow dy = u\,dx + x\,du$$

$$(u\,dx + x\,du) + \left(-\frac{ux}{x} + \frac{1}{\sin u}\right)dx = 0$$

$$\left(u - u + \frac{1}{\sin u}\right)dx + x\,du = 0 \Rightarrow du \cdot \sin u + \frac{dx}{x} = 0$$

$$\int \frac{dx}{x} + \int \sin u\,du = 0 \Rightarrow \ln|x| - \cos u = c$$

$$\ln x - \cos\frac{y}{x} = c \quad , \quad y(1) = 0$$

$$\ln 1 - \cos\frac{0}{1} = c \Rightarrow 0 - \cos 0 = c \Rightarrow c = -1$$

$$\ln|x| - \cos u = -1 \quad , \quad \ln|x| - \cos\frac{y}{x} = -1$$

$$\ln|x| = \cos\frac{y}{x} - 1$$

ILIA GRAPHIC

Day. Month. Year. Subject.

مثال: معادله دیفرانسیل $y' = \frac{y-x}{y+x}$ را حل کنید.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{y+x}$$

همگن است!

$$y = ux \Rightarrow dy = u\,dx + x\,du$$

$$\frac{u\,dx + x\,du}{dx} = \frac{ux - x}{ux + x} = \frac{u-1}{u+1}$$

$$(u+1)(u\,dx + x\,du) = (u-1)dx$$

$$u^2 dx + xu\,du + \cancel{u\,dx} + x\,du = \cancel{u\,dx} - dx$$

$$(1+u^2)dx + x(1+u)du = 0$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{1+u}{1+u^2}du = 0 \Rightarrow \frac{dx}{x} + \frac{du}{1+u^2} + \frac{u}{1+u^2}du = 0$$

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{du}{1+u^2} + \int \frac{u}{1+u^2}du = 0$$

$$\ln|x| + \frac{1}{2}\ln(1+u^2) + \arctan u = c$$

$$\ln x + \frac{1}{2}\ln\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right) + \arctan\frac{y}{x} = c$$

طرفین را در ۲ ضرب کنیم

$$2\ln x + \ln\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) + 2\arctan\frac{y}{x} = c$$

$$\ln x^2 + \ln\left(\frac{x^2+y^2}{x^2}\right) + 2\arctan\frac{y}{x} = c$$

$$\cancel{\ln\left(\frac{x^2(x^2+y^2)}{x^2}\right) + 2\arctan\frac{y}{x} = c}$$

$$\ln(x^2+y^2) + 2\arctan\frac{y}{x} = c$$

تذکر ۱

Day. Month. Year. Subject.

معادلات نوع $y' = f\left(\frac{ax+by}{cx+ey}\right)$ همگن هستند و با تغییر متغیر

تبدیل به نوع از هم جدا می‌گردد (صورت و مخرج دو خط راست از مرکز می‌گذرند)

$$y = ux \Rightarrow dy = u\,dx + x\,du$$

$$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$$

$$y' = u + x\frac{du}{dx}$$

$$u + x\frac{du}{dx} = f\left(\frac{a+bu}{c+eu}\right)$$

$$x\frac{du}{dx} = \underbrace{f\left(\frac{a+bu}{c+eu}\right) - u}_{f(u)} = f(u)$$

$$\frac{x\,du}{dx} = f(u) \Rightarrow \frac{du}{f(u)} = \frac{dx}{x}$$

تذکر ۲

Day. Month. Year. Subject.

معادلات بفرم $y' = f\left(\dfrac{ax+by+c}{ex+hy+d}\right)$ همگن نیستند و قابل تبدیل به همگن هستند کافیست این دو خط را به نقطه تلاقی آنها در صورت متقاطع بودن انتقال دهیم ($ah-be\neq 0$ یا $\begin{vmatrix} a & b \\ e & h \end{vmatrix}\neq 0$)

فرض کنیم (x_0, y_0) جواب دستگاه باشد

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ ex+hy+d=0 \end{cases}$$

$\underset{x\ \text{قدیم}}{x} = \underset{x\ \text{جدید}}{X} + x_0$ و $\underset{y\ \text{قدیم}}{y} = \underset{y\ \text{جدید}}{Y} + y_0$

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{aX+bY}{eX+hY}\right)$$

همگن

نکته: اگر دو خط موازی باشند $\begin{vmatrix} a & b \\ e & h \end{vmatrix}=0$ اگه فرض کنیم $u=ax+by$ یا $u=ex+hy$ که این کار به نوع متغیرهای از هم جدا تبدیل می‌شود

$$\frac{du}{dx} = a + b\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b}\left(\frac{du}{dx} - a\right) = f\left(\frac{u+c}{ku+d}\right)$$

$$\frac{du}{dx} = bf\left(\frac{u+c}{ku+a}\right) + c = H(u) \quad \text{و} \quad \frac{du}{H(u)} = dx$$

Day. Month. Year. Subject.

مثال: معادله دیفرانسیل $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y+2}{x-y-4}$ را حل کنید.

$\begin{vmatrix}1&1\\1&-1\end{vmatrix}=-1-1=-2\neq 0$ دترمینان ضرایب مخالف صفر

$$\begin{cases}x+y+2=0\\ x-y-4=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_0=\alpha=1\\ y_0=\beta=-3\end{cases}$$ محل تلاقی دو خط

$$\begin{cases}x=X+\alpha\\ y=Y+\beta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=X+1\Rightarrow dx=dX\\ y=Y-3\Rightarrow dy=dY\end{cases}$$

$X=x-1$

$Y=y+3$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(X+1)+(Y-3)+2}{(X+1)-(Y-3)-4}=\frac{x+Y}{x-Y}$$ همگن درجه ۱

$$y=ux\Rightarrow dy=u\,dx+x\,du$$

$$\frac{u\,dx+x\,du}{dx}=\frac{x+ux}{x-ux}=\frac{1+u}{1-u}$$

$$(1-u)(u\,dx+x\,du)=dx(1+u)$$

$$\cancel{u\,dx}+x\,du-u^2dx-ux\,du=dx+\cancel{u\,dx}$$

$$(1+u^2)dx+x(u-1)du=0$$

$$\frac{dx}{x}+\frac{u-1}{u^2+1}du=0$$

$$\frac{dx}{x}+\frac{u}{1+u^2}du-\frac{du}{1+u^2}=0$$

Day. Month. Year. Subject.

$$\ln|x| + \frac{1}{2}\ln(1+u^2) - \arctan u = c$$

$$\ln|x| + \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right) - \arctan\frac{y}{x} = c$$

به جای x مقدار $x-1$ قرار میدهیم

〃 y مقدار $y+2$ 〃

$$\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{(y+2)^2}{(x-1)^2}\right) - \arctan\frac{y+2}{x-1} = c$$

مثال : معادله دیفرانسیل $y' = \dfrac{x+y}{1-x-y}$ را حل نمائید.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$ دو خط موازی

$$u = x+y \Rightarrow \begin{cases} du = dx + y'dx \\ du = (1+y')dx \end{cases}$$

$u' = 1+y'$ یا $y' = u'-1$

$$u'-1 = \frac{u}{1-u} \Rightarrow u' = 1+\frac{u}{1-u} \Rightarrow \frac{du}{dx} = 1+\frac{u}{1-u}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1-u+u}{1-u} = \frac{1}{1-u} \Rightarrow (du)(1-u) = dx$$

$$u - \frac{1}{2}u^2 = x + c \Rightarrow (x+y) - \frac{1}{2}(x+y)^2 = x + c$$

$$y - \frac{1}{2}(x+y)^2 + x = x + c \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{2}(x+y)^2 + c}$$

مثال : معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید: $(x-2\sin y+3)dx+(2x-4\sin y-3)\cos y\,dy=0$

Day. Month. Year. Subject. (۳۱)

$\sin y = z \Rightarrow \cos y\, dy = dz$

$(\underbrace{x-2z}_{u}+3)dx+(2x-4z-3)dz=0 \qquad (I)$

$\longrightarrow u = x-2z \Rightarrow \frac{du}{dx} = 1-2\frac{dz}{dx}$ (مشتق نسبت به x)

$2\frac{dz}{dx} = 1-\frac{du}{dx} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{du}{dx}\right)$

$\frac{dz}{dx} = -\frac{(x-2z)+3}{2(x-2z)-3} = -\frac{u+3}{2u-3}$

$\frac{1}{2}\left(1-\frac{du}{dx}\right) = -\frac{u+3}{2u-3} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{4u+3}{2u-3}$

$\frac{2u-3}{4u+3}du = dx \Rightarrow \frac{(2u+\frac{3}{2})-(\frac{3}{2}+3)}{\underbrace{(4u+3)}_{2(2u+\frac{3}{2})}}du = dx$

$\frac{1}{2}du - \frac{\frac{9}{2}}{4u+3}du = dx \Rightarrow \int\frac{1}{2}du - \frac{9}{2}\int\frac{du}{4u+3} = \int dx$

$\frac{1}{2}u - \frac{9}{2}\left(\frac{1}{4}\right)Ln(4u+3) + c = x$

به جای $u = x+y$ قرار میدهیم

$\frac{1}{2}(x-2z) - \frac{9}{8}Ln|4(x-2z)+3| + c = x$

به جای z معادلش را قرار میدهیم

$\frac{1}{2}(x-2\sin y) - \frac{9}{8}Ln|4(x-2\sin y)+3| + C = x$

ILIA

Day. Month. Year. Subject.

نکته : بعضی از معادلات دیفرانسیل ممکن است با تغییر متغیر $y=t^{\alpha}$ معادله را به همگن تبدیل کرد

$$dy=\alpha t^{\alpha-1}dt$$

مثال : معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$(y^{4}-3x^{2})dy+xy\,dx=0$$

$$y=t^{\alpha}\Rightarrow dy=\alpha t^{\alpha-1}dt$$

$$(t^{4\alpha}-3x^{2})(\alpha t^{\alpha-1}dt)+x(t^{\alpha})dx=0$$

$$\alpha(t^{5\alpha-1}-3x^{2}t^{\alpha-1})dt+x^{1}t^{\alpha}dx=0$$

$5\alpha-1=2+\alpha-1=1+\alpha$ برای همگن بودن باید

$\alpha=\frac{1}{2}$

به ازای $\alpha=\frac{1}{2}$ ضریب dt همگن از درجه $\frac{3}{2}$ است درجه ضریب

dx نیز $1+\alpha$ است که به ازای $\alpha=\frac{1}{2}$ می‌شود $\frac{3}{2}$ درجه

$$\frac{1}{2}(t^{\frac{3}{2}}-3x^{2}t^{-\frac{1}{2}})dt+xt^{\frac{1}{2}}dx=0$$

طرفین را در $2t^{\frac{1}{2}}$ ضرب می‌کنیم

$$2t^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)(t^{\frac{3}{2}}-3x^{2}t^{-\frac{1}{2}})dt+2xt^{\frac{1}{2}}\cdot t^{\frac{1}{2}}dx=0$$

Day. Month. Year. Subject.

$(t^2 - 3x^2)\,dt + 2xt\,dx = 0$ همگن درجه ۲

$t = ux \Rightarrow dt = u\,dx + x\,du$

$x^2(u^2 - 3)(u\,dx + x\,du) + 2x^2 u\,dx = 0$

طرفین را بر x^2 تقسیم می‌کنیم

$u^3 dx + xu^2 du - 3u\,dx - 3x\,du + 2u\,dx = 0$

$x(u^2 - 3)\,du + (\underbrace{u^3 - 3u + 2u}_{u^3 - u})\,dx = 0$

$\frac{dx}{x} + \frac{u^2 - 3}{u^3 - u}\,du = 0$

$\frac{u^2-3}{u^3-u} = \frac{u^2-3}{u(u^2-1)} = \frac{u^2-3}{u(u-1)(u+1)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u-1} + \frac{C}{u+1} \Rightarrow \begin{cases} A = 3 \\ B = -1 \\ C = -1 \end{cases}$

$\frac{dx}{x} + \frac{3du}{u} - \frac{du}{u-1} - \frac{du}{u+1} = 0$

$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{3du}{u} - \int \frac{du}{u-1} - \int \frac{du}{u+1} = c \;\; \text{یا}\;\; \ln c$

$\ln|x| + 3\ln|u| - \ln|u-1| - \ln|u+1| = \ln c$

$\ln\left|\frac{xu^3}{(u-1)(u+1)}\right| = \ln c \Rightarrow \frac{xu^3}{u^2-1} = c$ $\quad u = \frac{t}{x}$

$y = t^{\frac{1}{2}} \Rightarrow y^2 = t$

$\frac{x\left(\frac{t}{x}\right)^3}{\left(\frac{t}{x}\right)^2 - 1} = c \Rightarrow \frac{t^3}{t^2 - x^2} = c \Rightarrow \frac{(y^2)^3}{(y^2)^2 - x^2} = c \Rightarrow \frac{y^6}{y^4 - x^2} = c$

ILIA GRAPHIC

Day. Month. Year. Subject.

معادله دیفرانسیل زیر را حل نمائید

$$4xy^2dx+(x^2y-1)dy=0$$

$$y=t^{\alpha} \Rightarrow dy=\alpha t^{\alpha-1}dt$$

$$4x(t^{\alpha})^2dx+(x^2(t^{\alpha})-1)(\alpha t^{\alpha-1}dt)=0$$

$$4xt^{2\alpha}dx+(x^2t^{\alpha}-1)(\alpha t^{\alpha-1})dt=0$$

$$4x^1t^{2\alpha}dx+(\alpha x^2t^{\alpha+\alpha-1}-\alpha t^{\alpha-1})dt=0$$

$$1+2\alpha=2+\alpha+\alpha-1=\alpha-1 \Rightarrow \alpha=-2$$

$$4xt^{-4}dx-2(x^2t^{-5}-t^{-3})dt=0$$

طرفین را در t^5 ضرب می‌کنیم

$$4xt\,dx-2(x^2-t^2)dt=0$$ همگن درجه ۲

$$t=ux \Rightarrow dt=u\,dx+x\,du$$

$$4x(ux)dx-2(x^2-u^2x^2)(u\,dx+x\,du)=0$$

طرفین را بر x^2 تقسیم می‌کنیم

$$4u\,dx-2(1-u^2)(u\,dx+x\,du)=0$$

$$2u\,dx-(1-u^2)(u\,dx+x\,du)=0$$

ILIA GRAPHIC

Day. Month. Year. Subject.

$$2u\,dx - u\,dx - x\,du + u^3 dx + x u^2 du = 0$$

$$(2u - u + u^3)dx - x(1-u^2)du = 0$$

$$(u+u^3)dx - x(1-u^2)du = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{1-u^2}{u+u^3}du$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{1}{u+u^3}du - \frac{u^2}{u+u^3}du = \frac{1}{u(1+u^2)}du - \frac{u}{1+u^2}du$$

$$\frac{dx}{x} = \left(\frac{1}{u} - \frac{u}{1+u^2}\right)du - \frac{u}{1+u^2}du$$

$$\ln|x| = \ln|u| - \frac{1}{2}\ln(1+u^2) - \frac{1}{2}\ln(1+u^2) + c$$

$$\ln|x| = \ln|u| - \ln(1+u^2) + c \qquad c = \ln c$$

$$\ln|x| = \ln\left|\frac{u}{1+u^2}\right|c$$

$$x = \frac{cu}{1+u^2} \Rightarrow x = \frac{c\frac{t}{x}}{1+\frac{t^2}{x^2}} \Rightarrow x = \frac{c\frac{y^{-\frac{1}{2}}}{x}}{1+\frac{(t^{-\frac{1}{2}})^2}{x^2}}$$

$$y = t^{-2} \Rightarrow y = \frac{1}{t^2} \Rightarrow t^2 = \frac{1}{y} \Rightarrow t = \frac{1}{\sqrt{y}} = y^{-\frac{1}{2}}$$

$$x = \frac{c y^{-\frac{1}{2}} x^2}{x(x^2+t^{-1})} \Rightarrow \frac{c y^{-\frac{1}{2}}}{x^2+t^{-1}} = 1 \Rightarrow \cdots$$

ILIA GRAPHIC

Day. Month. Year. Subject.

معادلات دیفرانسیل کامل

می‌دانیم دیفرانسیل کامل یک تابع از دو متغیر مستقل x و y مانند $u(x,y)$

بوسیله $du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$ داده می‌شود.

تعریف : معادله دیفرانسیل مرتبه اول

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

را کامل گوئیم اگر تابعی مانند $u(x,y) = c$ وجود داشته باشد بطوریکه

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y)$$

قضیه : فرض کنید P و Q و $\frac{\partial P}{\partial y}$ و $\frac{\partial Q}{\partial x}$ در ناحیه‌ای مانند D پیوسته باشند

آنگاه شرط لازم و کافی برای کامل بودن معادله دیفرانسیل مرتبه اول

$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ آنستکه $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

از $u(x,y) = c$ خواهیم داشت $du = 0$

Day. Month. Year. Subject.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = p(x,y) \Rightarrow \partial u = p(x,y)\,\partial x$$

$$u = \int p(x,y)\,dx + f(y)$$

y بعنوان یک پارامتر محسوب می‌شود و f(y) بعنوان مقدار ثابت انتگرال‌گیری [illegible]

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\int p(x,y)\,dx\right] + \frac{df(y)}{dy} = Q(x,y)$$

$$\frac{df(y)}{dy} = Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left[\int p(x,y)\,dx\right]$$

از طرفین نسبت به y انتگرال می‌گیریم

$$f(y) = \int\left[Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int p(x,y)\,dx\right]dy$$

که f(y) بدست می‌آید

Day. Month. Year. Subject.

مثال: معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$y^2dx+2xydy=0$$

$$y^2 \to P \qquad 2xy \to Q$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=2y \qquad \frac{\partial P}{\partial y}=2y \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

معادله کامل

$$\boxed{u(x,y)=c}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=y^2 \Rightarrow \partial u=y^2\partial x$$

$$u=y^2x+f(y) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y}=2xy+f'(y)$$

$$Q=\frac{\partial u}{\partial y} \Rightarrow 2xy=2xy+f'(y) \Rightarrow f'(y)=0 \Rightarrow f(y)=C_1$$

$$u=y^2x+C_1$$

$$C=y^2x+C_1 \Rightarrow \boxed{xy^2=K}$$

Day. Month. Year. Subject.

مثال: معادلهٔ زیر را حل کنید

$$\underbrace{(x-x^2y)}_{Q}dy+\underbrace{(y-xy^2)}_{P}dx=0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=1-2xy \qquad \frac{\partial P}{\partial y}=1-2xy \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$$

کامل

تابع فرض $u(x,y)=c$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y-xy^2 \Rightarrow \partial u=(y-xy^2)dx$$

$$u=xy-\frac{x^2y^2}{2}+f(y)$$

$$Q=\frac{\partial u}{\partial y}=(x-x^2y)+f'(y)=x-x^2y$$

$$f'(y)=0 \Rightarrow f(y)=c_1$$

$$u=xy-\frac{x^2y^2}{2}+c_1$$

$$c=xy-\frac{x^2y^2}{2}+c_1 \Rightarrow \boxed{xy-\frac{x^2y^2}{2}=k}$$

ILIA GRAPHIC

Day. Month. Year. Subject.

مثال : معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید

$$\underbrace{(2xy+3)}_{P}dx+\underbrace{(x^2+8y)}_{Q}dy=0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2x \qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=2x \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$ معادله کامل

$$u(x,y)=c$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2xy+3 \Rightarrow \partial u=(2xy+3)\partial x$$

$$u=x^2y+3x+f(y)$$

$$Q=\frac{\partial u}{\partial y}=x^2+f'(y)=x^2+8y \Rightarrow f'(y)=8y$$

$f(y)=4y^2+c_1$ یا $f(y)=4y^2$

$$u=x^2y+3x+4y^2=c$$

$$x^2y+3x+4y^2=c$$

Day. Month. Year. Subject.

مثال: معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$y' = \frac{x^2 - y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2-y}{x} \Rightarrow x\,dy = (x^2-y)\,dx$$

$$\underbrace{(x^2-y)}_{P}\,dx - \underbrace{x}_{Q}\,dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -1 \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = -1$$

$u(x,y) = c$ معادله حل

$$P = \frac{\partial u}{\partial x} = x^2 - y \Rightarrow \partial u = (x^2-y)\,\partial x$$

$$u = \frac{1}{3}x^3 - xy + f(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -x + f'(y) = Q \Rightarrow -x + f'(y) = -x$$

$$f'(y) = 0 \Rightarrow f(y) = c_1$$

$$u = \frac{1}{3}x^3 - xy + c_1 \Rightarrow c = \frac{1}{3}x^3 - xy + c_1 \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{1}{3}x^3 - xy = k}$$

ILIA GRAPHIC

Day. Month. Year. Subject.

مثال: معادله زیر را حل کنید.

$$\underbrace{(x^2-x+y^2)}_{P}dx-\underbrace{(e^y-2xy)}_{Q}dy=0$$

معادله کامل

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2y \qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=-(-2y)=2y$$

$$u(x,y)=c$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=(x^2-x+y^2)$$

$$\partial u=(x^2-x+y^2)\partial x$$

$$u=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+xy^2+f(y)$$

$$Q=\frac{\partial u}{\partial y}=2xy+f'(y)=-(e^y-2xy)$$

$$f'(y)=-e^y \Rightarrow f(y)=-e^y$$

$$u=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+xy^2-e^y=c$$

$$\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+xy^2-e^y=c$$

Day. Month. Year. Subject.

مثال: معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید

$$\underbrace{\cos y}_{P}\,dx + (\underbrace{y^2 - x\sin y}_{Q})\,dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\sin y \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\sin y$$

معادله کامل

$u(x,y) = C$

$$Q = \frac{\partial u}{\partial y} = y^2 - x\sin y \Rightarrow \partial u = (y^2 - x\sin y)\,\partial y$$

$$u = \frac{1}{3}y^3 + x\cos y + f(x)$$

$$P = \frac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow \cos y = \cos y + f'(x) \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow f(x) = C_1$$

$$u = \frac{1}{3}y^3 + x\cos y + C_1$$

$$\boxed{\frac{1}{3}y^3 + x\cos y = k}$$

Day. Month. Year. Subject.

فاکتورهای انتگرال گیری

اگر معادله (1) $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ کامل نباشد یعنی

$$\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$$

ممکن است بتوان تابع ناصفر $F(x,y) \neq 0$ را پیدا کرد بطوریکه طرفین معادله (1) را در $F(x,y)$ ضرب کرده معادله کامل شود چنین تابعی را فاکتور انتگرال می نامند ، یافتن چنین تابعی کار ساده ای نیست و قضیه ای برای پیدا کردن فاکتور انتگرال در حالت کلی نداریم ، اما می توان روشهای ساده ای برای حالات خاص در نظر گرفت

(در ضمن ممکن است بینهایت از این فاکتور انتگرال ها را بدست آورد)

Day. Month. Year. Subject.

مثال: نشان دهید $\frac{1}{x^2}$ یک فاکتور انتگرال است $x\,dy - y\,dx = 0$

$$F = \frac{1}{x^2}$$

$$Q \qquad P$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 1 \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = -1 \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$$

کامل نیست

طرفین را در $\frac{1}{x^2}$ ضرب می‌کنیم

$$\frac{x}{x^2}\,dy - \frac{y}{x^2}\,dx = 0 \Rightarrow \frac{1\,dy}{x} - \frac{y}{x^2}\,dx = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{1}{x^2} \Leftarrow Q \qquad P \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{x^2}$$

معادله کامل

$$Q = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{x} \Rightarrow \partial u = \frac{1}{x}\,\partial y \Rightarrow u = \frac{y}{x} + f(x)$$

$$P = \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} + f'(x) = -\frac{y}{x^2} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow f(x) = C_1$$

$$u = \frac{y}{x} + C_1 \Rightarrow \frac{y}{x} = K$$

Day. Month. Year. Subject.

مثال: آیا $F=\frac{1}{y^2}$ و $F=\frac{1}{xy}$ می‌توانند فاکتور انتگرال مثال قبل؟

$$xdy-ydx=0$$

الف: $\frac{x}{y^2}dy-\frac{y}{y^2}dx=0$

$Q=\frac{x}{y^2}$ ، $P=-\frac{y}{y^2}$

$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{1}{y^2}$ $\quad$ $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{1}{y^2}$ (معادله کامل)

ب: $F=\frac{1}{xy}$

$$\frac{x}{xy}dy-\frac{y}{xy}dx=0$$

$$\frac{1}{y}dy-\frac{1}{x}dx$$

$\frac{\partial Q}{\partial x}=0$ $\quad$ $\frac{\partial P}{\partial y}=0$ معادله کامل

Day. Month. Year. Subject.

مثال: اولاً نشان دهید که $F=\dfrac{y+1}{x^4}$ یک فاکتور انتگرال ساز است ثانیاً معادله را حل کنید.

$$3(y+1)\,dx-2x\,dy=0$$

$$\frac{3(y+1)(y+1)}{x^4}\,dx-\frac{2x(y+1)}{x^4}\,dy=0$$

$$\underbrace{\frac{3(y+1)^2}{x^4}}_{P}\,dx-\underbrace{\frac{2(y+1)}{x^3}}_{Q}\,dy=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{3(2)(y+1)}{x^4}=\dfrac{6(y+1)}{x^4}\\[2ex]\dfrac{\partial Q}{\partial x}=-\dfrac{2(y+1)(-3x^2)}{x^6}=\dfrac{6(y+1)}{x^4}\end{cases}$$

پس معادله کامل است $u(x,y)=c$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=Q\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{2(y+1)}{x^3}\Rightarrow\partial u=-\frac{2(y+1)}{x^3}\,\partial y$$

$$u=-\frac{(y+1)^2}{x^3}+f(x)$$

$$P=\frac{\partial u}{\partial x}\Rightarrow\frac{3(y+1)^2}{x^4}=\frac{-(y+1)^2(-3x^2)}{x^6}+f'(x)\Rightarrow f'(x)=0$$

$$f(x)=C_1$$

$$u=-\frac{(y+1)^2}{x^3}+C_1\Rightarrow\frac{(y+1)^2}{x^3}=k$$

Day. Month. Year. Subject.

نکته : برای تعیین فاکتور انتگرال معادله دیفرانسیل $Pdx+Q\,dy=0$ (1)

معادلات خاص زیر را بررسی می‌کنیم ، فرض کنیم معادله دارای فاکتور انتگرال

$F(x,y)\neq 0$ باشد در اینصورت باید

۲) $FP\,dx+FQ\,dy=0$

۳) $\dfrac{\partial (FP)}{\partial y}=\dfrac{\partial (FQ)}{\partial x}$

۴) $F\dfrac{\partial P}{\partial y}+P\dfrac{\partial F}{\partial y}=F\dfrac{\partial Q}{\partial x}+Q\dfrac{\partial F}{\partial x}$

طرفین (۴) را بر F تقسیم می‌کنیم

۵) $\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{Q}{F}\dfrac{\partial F}{\partial x}-\dfrac{P}{F}\dfrac{\partial F}{\partial y}$

۶) $\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}=Q\dfrac{\partial \ln F}{\partial x}-P\dfrac{\partial \ln F}{\partial y}$

الف : اگر $\dfrac{1}{Q}\left(\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}\right)=f(x)$ باشد در اینصورت معادله (1)

دارای فاکتور انتگرال بفرم $F(x)=e^{\int f(x)dx}$ است .

ب : اگر $\dfrac{1}{P}\left(\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}\right)=-f(y)$ باشد معادله (1) دارای

فاکتور انتگرال بفرم $F(y)=e^{\int f(y)dy}$ است

Day. Month. Year. Subject.

پ : اگر $\frac{1}{yQ-xP}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=f(x,y)$ باشد در اینصورت معادله دیفرانسیل دارای فاکتور انتگرال زیر است

$$F(z)=e^{\int f(z)dz} \quad , \quad z=xy$$

ت : اگر $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{xQ-yP}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=f(x^2+y^2)$ باشد ، معادله دارای فاکتور انتگرال $z=x^2+y^2$ ، $F(z)=e^{\int f(z)dz}$ است ،

ث : اگر $\frac{y^2}{xP+yQ}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=f\left(\frac{x}{y}\right)$ فاکتور انتگرال بصورت

$$F(z)=e^{\int f(z)dz} \quad , \quad z=\frac{x}{y}$$

است

Day. Month. Year. Subject.

مثال: معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید

$$(\underbrace{x+y^2}_{P})\,dx - \underbrace{2xy}_{Q}\,dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = -2y \ ، \ \frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$$ کامل نیست

$$\frac{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \frac{2y-(-2y)}{-2xy} = -\frac{2}{x} = f(x)$$

$$F = e^{\int f(x)dx} \Rightarrow F = e^{\int -\frac{2}{x}dx} = e^{-2\ln x}$$

$$F = e^{\ln x^{-2}} = e^{\ln \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{x^2}$$

تذکر: $a^{\log_a x} = x$ ، $x>0 , a>0 , a\neq 1$

$F = \frac{1}{x^2}$ فاکتور انتگرال

$$\frac{x+y^2}{x^2}dx - \frac{2xy}{x^2}dy = 0$$

$$\underbrace{\left(\frac{1}{x} + \frac{y^2}{x^2}\right)}_{P}dx - \underbrace{\frac{2y}{x}}_{Q}\,dy = 0$$

Day. Month. Year. Subject.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{2y}{x^2} \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{2y}{x^2}$$

معادله کامل

$$u(x,y) = c$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{x} + \frac{y^2}{x^2} \Rightarrow \partial u = \left(\frac{1}{x} + \frac{y^2}{x^2}\right)\partial x$$

$$\partial u = \frac{\partial x}{x} + \frac{y^2}{x^2}\partial x \Rightarrow u = \ln|x| - \frac{y^2}{x} + f(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Q \Rightarrow -\frac{2y}{x} + f'(y) = -\frac{2y}{x} \Rightarrow f'(y) = 0 \Rightarrow f(y) = c$$

$$u = \ln|x| - \frac{y^2}{x} + c_1 \Rightarrow c = \ln|x| - \frac{y^2}{x} + c_1$$

$$\ln|x| - \frac{y^2}{x} = C$$

Day. Month. Year. Subject.

مثال: معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$\underbrace{y(1+xy)}_{P}dx - \underbrace{x}_{Q}dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1+2xy \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = -1$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 1+2xy-(-1) = 2+2xy = 2(1+xy)$$

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{P} = \frac{2(1+xy)}{y(1+xy)} = \frac{2}{y} \Rightarrow f(y) = \frac{2}{y} = -(-\frac{2}{y})$$

$f(y)$

$$F = e^{-\int f(y)dy}$$

$$F = e^{-\int \frac{2}{y}dy} = e^{-2\ln y} = e^{\ln y^{-2}} = e^{\ln \frac{1}{y^2}} = \frac{1}{y^2}$$

فاکتور انتگرال:

$$\frac{y(1+xy)}{y^2}dx - \frac{x}{y^2}dy = 0$$

$$\frac{(1+xy)}{y}dx - \frac{x}{y^2}dy = 0$$

$$\underbrace{(\frac{1}{y}+x)}_{P}dx - \underbrace{\frac{x}{y^2}}_{Q}dy = 0$$

Day. Month. Year. Subject.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{y^2} \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{1}{y^2}$$

معادله کامل است

$$u(x,y) = c$$

$$Q = \frac{\partial u}{\partial y} \Rightarrow -\frac{x}{y^2} = \frac{\partial u}{\partial y} \Rightarrow \partial u = -\frac{x}{y^2}\,\partial y$$

$$u = \frac{x}{y} + f(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P \Rightarrow \frac{1}{y} + x = \frac{1}{y} + f'(x) \Rightarrow f'(x) = x$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + c_1$$

$$u = \frac{x}{y} + \frac{1}{2}x^2 + c_1 \Rightarrow \frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} = k$$

Day. Month. Year. Subject.

مثال: معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$\underbrace{(y+x^2y^2)}_{P}dx+\underbrace{x}_{Q}dy$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=1+2x^2y \qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=1 \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}=2x^2y$$

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{yQ-xP}=\frac{2x^2y}{xy-xy-x^3y^2}=-\frac{2}{xy}$$

$$z=xy \Rightarrow f=-\frac{2}{z}$$

$$F(z)=e^{\int f(z)dz}$$

$$F(z)=e^{-2\int\frac{1}{z}dz}=e^{-2\ln|z|}=e^{\ln z^{-2}}=z^{-2}=\frac{1}{z^2}$$

$$F=\frac{1}{x^2y^2}$$

$$\frac{(y+x^2y^2)}{x^2y^2}dx+\frac{x}{x^2y^2}dy=0$$

$$\underbrace{\left(\frac{1}{x^2y}+x^2\right)}_{P}dx+\underbrace{\frac{1}{xy^2}}_{Q}dy=0$$

Day. Month. Year. Subject.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{x^2y^2} \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{1}{x^2y^2}$$ کاملست

$$u(x,y)=C$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{x^2y} + x^2 \Rightarrow \partial u = \left(\frac{1}{x^2y} + x^2\right)\partial x$$

$$u = -\frac{1}{xy} + \frac{1}{3}x^3 + f(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Q \Rightarrow \frac{1}{xy^2} + f'(y) = \frac{1}{xy^2} \Rightarrow f'(y) = 0 \Rightarrow f(y) = C_1$$

$$u = -\frac{1}{xy} + \frac{1}{3}x^3 + C_1$$

$$-\frac{1}{xy} + \frac{1}{3}x^3 = C$$

ILIA

Day. Month. Year. Subject.

مثال : معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید

$$\underbrace{(x - xy)}_{P}\,dx + (\underbrace{y + x^2}_{Q})\,dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -x \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$$

کامل نیست

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = -x - 2x = -3x$$

$$\frac{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{2(xQ - yP)} = \frac{-3x}{2(xy + x^3 - xy + xy^2)}$$

$$= \frac{-3x}{2x(x^2+y^2)} = \frac{-3}{2(\underbrace{x^2+y^2}_{z})}$$

$$F(z) = e^{\int f(z)dz} \Rightarrow F(z) = e^{-\frac{3}{2}\int \frac{dz}{z}} = e^{-\frac{3}{2}\ln|z|}$$

$$F = \frac{1}{z^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

فاکتور انتگرال

$$\frac{(x - xy)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx + \frac{(y - x^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\,dy = 0$$

$$\frac{y-1}{\sqrt{x^2+y^2}} = C$$

جواب عمومی

معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول

اگر یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول را بتوان بفرم زیر نوشت آن را خطی گوئیم.

$$A(x)\frac{dy}{dx}+B(x)y+C(x)=0$$

یا

$$A(x)y'+B(x)y+C(x)=0$$

در فاصله‌ای که $A(x)\neq 0$ می‌توان طرفین را بر $A(x)$ تقسیم کرد

$$\frac{dy}{dx}+\underbrace{\frac{B(x)}{A(x)}}_{f(x)}y+\frac{C(x)}{A(x)}=0 \quad \text{یا} \quad y'+f(x)y=q(x)$$

*) $\frac{dy}{dx}+f(x)y=q(x)$ یا $y'+f(x)y=q(x)$

اگر $q(x)=0$ معادله همگن و اگر $q(x)\neq 0$ معادله ناهمگن

الف: اگر معادله همگن باشد

1) $\frac{dy}{dx}+f(x)y=0$

$$\frac{dy}{y}=-f(x)dx \Rightarrow \ln y=-\int f(x)dx$$

$$y=e^{-\int f(x)dx}$$

Day. Month. Year. Subject.

ب: اگر معادله ناهمگن باشد ابتدا آنرا بفرم زیر می‌نویسیم

$$۲)\quad \left(y f(x) - q(x)\right)dx + dy = 0$$

سپس شرط عامل بودن را برای آن ایجاد می‌کنیم در ضمن معادله * دارای فاکتور انتگرال است زیرا.

$$\frac{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = f(x) \quad , \quad g(x) = \int f(x)\,dx$$

$$y = e^{-g(x)}\left[\int q(x) e^{g(x)}\,dx + c\right]$$ جواب عمومی

مثال: معادله دیفرانسیل زیر را حل نمائید.

$$y' + 2y = e^{x}$$

$$f(x) = 2 \qquad q(x) = e^{x}$$

با انتگرال‌گیری از $f(x)$ داریم

$$g(x) = \int f(x)\,dx \Rightarrow g(x) = \int 2\,dx = 2x$$

$$y = e^{-g(x)}\left[\int q(x) e^{g(x)}\,dx + c\right]$$

$$y = e^{-2x}\left[\int e^{x} e^{2x}\,dx + c\right] = e^{-2x}\left[\int e^{3x}\,dx + c\right]$$

$$= e^{-2x}\left(\frac{1}{3}e^{3x} + c\right) = \frac{e^{3x}}{e^{2x}} + \frac{c}{e^{2x}} = \frac{e^{x}}{3} + \frac{c}{e^{2x}}$$

ILIA GRAPHIC

Day. Month. Year. Subject.

$y(0)=0$

مثال : معادله دیفرانسیل زیر را حل نمایید

بشرط $y'-xy=x$

$$y'-xy=x$$

$$f(x)=-x \qquad q(x)=x$$

$$g(x)=\int -x\,dx=-\frac{1}{2}x^2$$

$$y=e^{-g(x)}\left[\int q(x)e^{g(x)}dx+c\right]$$

$$y=e^{-(-\frac{1}{2}x^2)}\left[\int x e^{-\frac{1}{2}x^2}dx+c\right]=e^{\frac{1}{2}x^2}\left[-e^{-\frac{1}{2}x^2}+c\right]$$

$$y(0)=0 \Rightarrow e^{\frac{1}{2}(0)^2}\left[-e^{-\frac{1}{2}(0)^2}+c\right]=0 \Rightarrow 1(-1+c)=0 \Rightarrow c=1$$

$$y=e^{\frac{1}{2}x^2}\left[-e^{-\frac{1}{2}x^2}+1\right]=-e^{\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x^2}+1(e^{\frac{1}{2}x^2})$$

$$y=-e^{0}+e^{\frac{1}{2}x^2}=e^{\frac{1}{2}x^2}-1$$

$$\underline{y=e^{\frac{1}{2}x^2}-1}$$

ILIA GRAPHIC

۶۰

Day. Month. Year. Subject.

(تکراری)

مثال: معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید

$$(\underbrace{x - xy}_{P})\,dx + (\underbrace{y + x^2}_{Q})\,dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -x \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$$

کامل نیست

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{2(xQ - yP)} = \frac{-x - 2x}{2\left(x(y+x^2) - y(x-xy)\right)} = \frac{-3x}{2(\cancel{xy} + x^3 - \cancel{xy} + xy^2)}$$

$$= \frac{-3x}{2x(x^2+y^2)} = -\frac{3}{2(\underbrace{x^2+y^2}_{z})} = -\frac{3}{2z} \rightarrow f(z) = -\frac{3}{2z}$$

$$g(z) = e^{\int f(z)dz}$$

$$g(z) = e^{\int -\frac{3}{2z}dz} = e^{-\frac{3}{2}\ln z} = \frac{1}{z^{\frac{3}{2}}}$$

فاکتور انتگرال

$$g(x^2+y^2) = \frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

فاکتور انتگرال

$$\frac{(x - xy)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}dx + \frac{(y - x^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}dy = 0$$

معادله کامل است

و در نهایت جواب معادله بصورت زیر خواهد بود.

$$\frac{y-1}{\sqrt{x^2+y^2}} = c$$

۶۱

Day. Month. Year. Subject.

مثال: معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید:

$$\tan x \frac{dy}{dx} + y = ۳x \sec x$$

$$\tan x\, y' + y = ۳x\left(\frac{1}{\cos x}\right) \Rightarrow y' + \frac{y}{\tan x} = \frac{\frac{۳x}{\cos x}}{\tan x}$$

$$y' + (\cot x)y = \frac{۳x}{\sin x} \Rightarrow y' + y(\cot x) = \underbrace{۳x \csc x}$$

$$f(x) = \cot x \qquad q(x) = ۳x \csc x$$

$$g(x) = \int f(x)dx \Rightarrow g(x) = \int \cot x\, dx = \ln \sin x$$

$$y = e^{-g(x)}\left[\int q(x) e^{g(x)} dx + c\right] \Rightarrow y = e^{-\ln \sin x}\left[\int ۳x \csc x\, e^{\ln \sin x} dx + c\right]$$

$$y = \frac{1}{\sin x}\left(\int ۳x\left(\frac{1}{\sin x}\right)(\sin x)dx + c\right)$$

$$y = \frac{1}{\sin x}\left[\int ۳x\, dx + c\right] = \frac{1}{\sin x}\left(\frac{۳}{۲}x^۲ + c\right)$$

$$y = \frac{۳}{۲}x^۲ \csc x + c \csc x$$

ILIA GRAPHIC

Day. Month. Year. Subject.

روش دوم: روش تغییر پارامتر برای حل معادله دیفرانسیل

$$\frac{dy}{dx} + f(x)\,y = q(x) \qquad (1)$$

ابتدا معادله همگن متناظر را حل می‌کنیم

$$۲) \quad \frac{dy}{dx} + f(x)y = ۰$$

$$۳) \quad \frac{dy}{y} = -f(x)\,dx \Rightarrow Lny = \int -f(x)dx \Rightarrow y = c\,e^{-\int f(x)dx}$$

c را بعنوان تابعی از x فرض می‌کنیم $(c(x))$

$$۴) \quad y = c(x)\,e^{-\int f(x)dx}$$

از طرفین نسبت به x مشتق می‌گیریم

$$\frac{dy}{dx} = c'(x)\,e^{-\int f(x)dx} - c(x)f(x)\,e^{-\int f(x)dx}$$

$$c'(x)e^{-\int f(x)dx} - c(x)f(x)e^{-\int f(x)dx} + c(x)f(x)e^{-\int f(x)dx} = q(x)$$

$$c'(x) = q(x)\,e^{\int f(x)dx}$$

$$c(x) = \int q(x)\,e^{\int f(x)dx}dx + \lambda$$

با گذاری در (۴)

$$y = e^{-\int f(x)dx}\left(\int q(x)\,e^{\int f(x)dx}dx + \lambda\right)$$

Day. Month. Year. Subject.

مثال : معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید:

$$\frac{dy}{dx}+2y=x^2+2x$$

از روش دوم:

$$\frac{dy}{dx}+2y=0 \Rightarrow \frac{dy}{y}=-2dx$$

$$\ln y=-2x+c_1 \Rightarrow y=e^{-2x+c_1}=e^{c_1}\cdot e^{-2x}$$

$c(x)$ در نظر می‌گیریم

$$y=c(x)e^{-2x}$$

$$\frac{dy}{dx}=c'(x)e^{-2x}-2c(x)e^{-2x}$$

$$c'(x)e^{-2x}\cancel{-2c(x)e^{-2x}}\cancel{+2(c(x))e^{-2x}}=x^2+2x$$

$$c'(x)e^{-2x}=x^2+2x \Rightarrow c'(x)=(x^2+2x)e^{2x}$$

$$c(x)=\int (x^2+2x)e^{2x}dx+\lambda$$

$$c(x)=\frac{1}{2}x^2e^{2x}+\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+\lambda$$

$$y=\left(\frac{1}{2}x^2e^{2x}+\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+\lambda\right)\left(e^{-2x}\right)$$

$$y=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}+\lambda e^{-2x}$$

ILIA

Day. Month. Year. Subject.

مثال: معادله دیفرانسیل زیر را حل نمائید

$$y' - \frac{1}{2x}\, y = \frac{3}{2}x$$

معادله همگن نظیر معادله

$$y' - \frac{1}{2x}y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2x}y \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{2x} \Rightarrow \ln y = \frac{1}{2}\ln x + \ln c$$

$$\ln y = \ln x^{\frac{1}{2}}(c) \quad \text{و} \quad \ln y = \ln (c(x))\, x^{\frac{1}{2}}$$

$$* \quad y = c(x)\, x^{\frac{1}{2}}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = c'(x)\, x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1}(c(x)) = c'(x)\, x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}(c(x))$$

جایگذاری در معادله دیفرانسیل

$$c'(x)\, x^{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2} c(x)\, x^{-\frac{1}{2}}} - \cancel{\frac{1}{2x}\left(c(x)\, x^{\frac{1}{2}}\right)} = \frac{3}{2}x$$

$$c'(x)\, x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}x \Rightarrow c'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

$$c(x) = \frac{3}{2}\int x^{\frac{1}{2}}\, dx + \lambda \Rightarrow c(x) = x^{\frac{3}{2}} + \lambda$$

* جایگذاری در معادله

$$y = \left(x^{\frac{3}{2}} + \lambda\right)\left(x^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$y = \left(x^{\frac{3}{2}} + \lambda\right) x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{2}} x^{\frac{1}{2}} + \lambda\, x^{\frac{1}{2}} = x^2 + \lambda\, x^{\frac{1}{2}}$$

$$y = x^2 + \lambda\, x^{\frac{1}{2}}$$

Day. Month. Year. Subject.

تذکر مهم: یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول می‌تواند نسبت به x به عنوان تابعی از y خطی باشد و صورت کلی آن برابر است

$$\frac{dx}{dy} + f(y)x = q(y)$$

$$x = e^{-g(y)}\left[\int q(y)e^{g(y)}\,dy + c\right]$$

$$g(y) = \int f(y)\,dy$$

مثال: معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید که در آن

$$y'(x\sin y + 2\sin 2y) = 1$$

$$x\sin y + 2\sin 2y = \frac{dx}{dy} \Rightarrow x'_y \underbrace{- x\sin y}_{f(y)} = \underbrace{2\sin 2y}_{q(y)}$$

$$g(y) = \int -\sin y\,dy = \cos y$$

$$x = e^{-\cos y}\left[\int 2\sin 2y\, e^{\cos y}\,dy + c\right]$$

$2\sin y\cos y$

$$x = e^{-\cos y}\left[-4\cos y\, e^{\cos y} + 4e^{\cos y} + c\right]$$

$$x = -4\cos y + 4 + c\,e^{-\cos y}$$

Day. Month. Year. Subject.

معادله برنولی : صورت کلی این معادله بفرم زیر است

$$\frac{dy}{dx} + y f(x) = y^n g(x)$$

که در آن $n \in \mathbb{R}$, $n \neq 0$, $n \neq 1$ زیرا اگر صفر و یک باشد خطی است.

برای حل این معادله طرفین را بر y^n تقسیم کرده و تغییر متغیر $u = y^{1-n}$ میدهیم. آنگاه تبدیل به معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول می‌شود.

$$u = y^{1-n} , \quad \frac{du}{dx} = (1-n) y^{-n} \frac{dy}{dx}$$

$$y^{-n} \frac{dy}{dx} + y^{1-n} f(x) = g(x)$$

طرفین را در $(1-n)$ ضرب میکنیم

$$\underbrace{(1-n) y^{-n} \frac{dy}{dx}} + (1-n) y^{1-n} f(x) = (1-n) g(x)$$

$$\frac{du}{dx} + (1-n) u f(x) = (1-n) g(x)$$ (خطی مرتبه اول نسبت به u)

$$u = y^{1-n} = e^{-\int (1-n) f(x) dx} \left[\int (1-n) g(x) e^{\int (1-n) f(x) dx} dx + c \right]$$

ILIA GRAPHIC

مثال : معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$\frac{dy}{dx} - y = xy^2$$

$$n = 2$$

طرفین را بر y^2 تقسیم می‌کنیم

$$y^{-2}\frac{dy}{dx} - \frac{y}{y^2} = \frac{xy^2}{y^2} \Rightarrow y^{-2}\frac{dy}{dx} - \frac{1}{y} = x \quad *$$

$$y^{-2}\frac{dy}{dx} - y^{-1} = x$$

$$u = y^{-1} \Rightarrow \frac{du}{dx} = (-1)y^{-2}\frac{dy}{dx} \Rightarrow y^{-2}\frac{dy}{dx} = -\frac{du}{dx}$$

$$-\frac{du}{dx} - u = x \Rightarrow \frac{du}{dx} + 1u = -x \longrightarrow q(x) = -x$$

$$f(x) = 1$$

یا

$$u' + u = -x$$

$$g(x) = \int f(x)\,dx = \int 1\,dx = x$$

$$u = e^{-g(x)}\left[\int q(x)\, e^{g(x)}\,dx + c\right]$$

$$u = e^{-x}\left[\int (-x)\, e^{x}\,dx + c\right] = e^{-x}\left[(1-x)e^{x} + c\right]$$

$$\begin{cases} u = 1 - x + ce^{-x} \\ u = y^{-1} \end{cases} \Rightarrow y^{-1} = 1 - x + ce^{-x}$$

$$\boxed{\frac{1}{y} = 1 - x + ce^{-x}}$$

۶۸

Day. Month. Year. Subject.

معادله دیفرانسیل زیر را حل نمائید

$$(2xy^5 - y)dx + 2xdy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2xy^5 - y}{2x} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} + \frac{2xy^5}{2x} - \frac{y}{2x} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} + y^5 - \frac{y}{2x} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} - \frac{y}{2x} = -y^5$$

(برنولی $n=5$)

طرفین بر y^5 تقسیم شود

$$y^{-5}\frac{dy}{dx} - \frac{1}{2x}y^{-4} = -1$$

$$u = y^{-4} \Rightarrow \frac{du}{dx} = (-4)y^{-5}\frac{dy}{dx}$$

$$\underbrace{(-4)y^{-5}\frac{dy}{dx}}(-4)\left(-\frac{1}{2x}\right)y^{-4} = (-4)(-1)$$

$$\frac{du}{dx} + \frac{2}{x}u = 4$$

(خطی مرتبه اول نسبت به u)

$$f(x) = \frac{2}{x} \qquad q(x) = 4$$

$$g(x) = \int f(x)\,dx \Rightarrow g(x) = \int \frac{2}{x}dx = 2\ln x$$

$$u = e^{-g(x)}\left[\int q(x)e^{g(x)}dx + c\right]$$

$$u = e^{-2\ln x}\left[\int 4e^{2\ln x}dx + c\right] = \frac{1}{x^2}\left[\int 4x^2dx + c\right]$$

$$u = \frac{1}{x^2}\left[\frac{4}{3}x^3 + c\right] = \frac{4}{3}x + \frac{c}{x^2}$$

$$\begin{cases} u = \frac{4}{3}x + \frac{c}{x^2} \\ u = y^{-4} \end{cases} \Rightarrow y^{-4} = \frac{4}{3}x + \frac{c}{x^2}$$

Day. Month. Year. Subject.

معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم و بالاتر

صورت کلی یک معادله دیفرانسیل مرتبه n ام بصورت زیر است

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \qquad (1)$$

معادله (1) را به دو دسته تقسیم می کنیم

الف : معادلات دیفرانسیل خطی

ب : معادلات دیفرانسیل غیر خطی

خطی نیز به دو دسته تقسیم می گردد

۱- خطی با ضرایب ثابت

۲- خطی با ضرایب متغیر

تذکر: خطی با ضرایب ثابت از اهمیت بیشتری برخوردار است.

تعریف: معادله دیفرانسیل مرتبه دوم را خطی گوئیم اگر بصورت زیر باشد

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

اگر $r(x)=0$ معادله همگن در غیر اینصورت غیر همگن می نامیم

صورت معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم همگن بصورت زیر است.

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

توابع $p(x)$ و $q(x)$ ضرایب معادله فرض می کنیم در بازه (a_1, a_2) پیوسته باشند.

آنگاه یک و فقط یک تابع مانند $y=G(x)$ وجود دارد که در معادله زیر صدق کند

در نقطه خاص x_0

$$y(x_0)=y_0 \,,\; y'(x_0)=0 \,,\; y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

ILIA GRAPHIC

Day. Month. Year. Subject.

قضیه: اگر $y_1 = G(x)$ یک جواب معادله دیفرانسیل خطی همگن $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ باشد آنگاه $y = cG(x)$ (c ثابت دلخواه) نیز یک جواب معادله است.

قضیه: اگر y_1 و y_2 دو جواب معادله $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ باشند آنگاه $y_1 + y_2$ نیز یک جواب برای معادله است.

از دو قضیه فوق نتیجه می‌گیریم که اگر y_1 و y_2 دو جواب معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دو همگن باشند در اینصورت $c_1y_1 + c_2y_2$ نیز یک جواب خواهد بود.

معادلات خطی مرتبه دو همگن با ضرایب ثابت

معادله $y'' + ay' + by = 0$ (II) را معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم همگن با ضرایب ثابت می‌نامیم که در آن $a, b \in \mathbb{R}$ (عدد ثابت) در دامنه محور x ها می‌باشد.

$t^2 + at + b = 0$ معادله مفسر یا معادله شاخص

$\Delta = a^2 - 4b$

1) $\Delta > 0$ معادله دو ریشه دارد (ریشه t_1, t_2) $\Rightarrow \begin{cases} y_1 = e^{t_1 x} \\ y_2 = e^{t_2 x} \end{cases}$

2) $\Delta = 0$ ریشه مضاعف: $t_1 = t_2$

3) $\Delta < 0$ ریشه حقیقی ندارد

$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$

Day. Month. Year. Subject.

تعریف: دو تابع $y_1(x)$ و $y_2(x)$ را روی فاصله $x_0 \leq x \leq x_1$ مستقل خطی گوئیم اگر برای هر x در این فاصله اگر $c_1y_1(x)+c_2y_2(x)=0$ نتیجه آن $c_1=c_2=0$ و بستگی خطی دارند اگر

$$y_1(x)=ky_2(x) \quad \text{یا} \quad y_2(x)=ly_1(x) \quad \forall x\in[x_0,x_1]$$

(L, k دو عدد ثابت)

تذکر: اگر $y_1(x)\neq 0$ یا $y_2(x)\neq 0$ روی فاصله $x_0 \leq x \leq x_1$ باشد آنگاه y_1 و y_2 بستگی خطی دارند اگر و فقط اگر $\frac{y_1}{y_2}$ برابر با یک مقدار ثابت باشد، پس اگر $\frac{y_1}{y_2}$ تابعی از x در اینصورت y_1 و y_2 مستقل خطی اند

مثال: توابع $y_2=5x$ و $y_1=6x$ بستگی خطی دارند زیرا

$$\frac{y_1}{y_2}=\frac{6x}{5x}=\frac{6}{5}$$ (عدد ثابت)

مثال: توابع $y_1=e^x$ و $y_2=e^{2x}$ مستقل خطی اند.

$$\frac{y_1}{y_2}=\frac{e^{2x}}{e^x}=e^x$$ تابعی از x

Day. Month. Year. Subject.

تذکر: اگر y_1 و y_2 دو جواب معادله II باشند و بستگی خطی داشته باشند یعنی $\frac{y_1}{y_2}=k$

در اینصورت عبارت $y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ تبدیل به عبارتی می‌شود

که شامل یک پارامتر دلخواه است زیرا

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)=c_1ky_2(x)+c_2y_2(x)$$

$$=\underbrace{(c_1k+c_2)}_{c}y_2(x)=cy_2(x)$$

اگر y_1 و y_2 دو جواب معادله II و مستقل خطی باشند چنین تبدیلی امکان پذیر نیست

توجه: می‌دانیم اگر معادله مفسر دارای دو ریشه حقیقی متمایز باشد در اینصورت

$$(t_1\neq t_2)\quad y_2=e^{t_2x}\ ,\quad y_1=e^{t_1x}$$

$$\frac{y_1}{y_2}=\frac{e^{t_1x}}{e^{t_2x}}=e^{(t_1-t_2)x}\neq k\ (\text{مقدار ثابت } k)$$

پس مستقل خطی اند، یعنی

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$$

$$\boxed{y(x)=c_1e^{t_1x}+c_2e^{t_2x}}$$

Day. Month. Year. Subject.

مثال: جواب عمومی معادله زیر را تعیین نمائید. $y''+2y'-15y=0$

$$t^2+2t-15=0 \Rightarrow \begin{cases} t_1=5 \\ t_2=-3 \end{cases}$$

$$y=c_1e^{5x}+c_2e^{-3x}$$

مثال: جواب عمومی معادله $y''-y'-6y=0$ را بدست آورده سپس جواب خصوصی را برای شرایط $y(0)=3$ و $y'(0)=-4$ تعیین نمائید.

$$t^2-t-6=0 \Rightarrow \begin{cases} t_1=-2 \\ t_2=3 \end{cases}$$

$y=c_1e^{-2x}+c_2e^{3x}$ جواب عمومی

$$\downarrow$$

$$y'=-2c_1e^{-2x}+3c_2e^{3x}$$

$$\begin{cases} y(0)=c_1e^{-2(0)}+c_2e^{3(0)}=3 \\ y'(0)=-2c_1e^{-2(0)}+3c_2e^{3(0)}=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1=\frac{13}{5} \\ c_2=\frac{2}{5} \end{cases}$$

$$y=\frac{1}{5}\left(13e^{-2x}+2e^{3x}\right)$$

حالت دوم: معادله مفسر دارای دو ریشه متمایز مختلط یا موهومی: $a^2-4b<0$

$$t_1 = p+iq \quad , \quad t_2 = p-iq$$

$$y_1 = e^{(p+iq)x} \qquad y_2 = e^{(p-iq)x}$$

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{(p+iq)x}}{e^{(p-iq)x}} = e^{2iqx} \neq K$$ مستقل خطی

$$y(x) = c_1 e^{(p+iq)x} + c_2 e^{(p-iq)x}$$

از طرفی $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

با انتخاب $c_2 = \frac{1}{2}(A+iB)$, $c_1 = \frac{1}{2}(A-iB)$

$$y(x) = e^{px}\left(\frac{(A-iB)}{2}(\cos qx + i\sin qx) + \frac{(A+iB)}{2}(\cos qx - i\sin qx)\right)$$

$$= e^{px}(A\cos qx + B\sin qx)$$

لذا اگر معادله مفسر دارای دو ریشه بصورت $p\pm iq$ باشد در اینصورت جواب عمومی معادله II برابر است با:

$$y(x) = e^{px}(A\cos qx + B\sin qx)$$

Day. Month. Year. Subject.

مثال : جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را تعیین نمائید.

$y''+2y'+10y=0$

$t^2+2t+10=0 \Rightarrow t=-1\pm\sqrt{-9}=-1\pm 3i$

حقیقی p موهومی q

$y=e^{px}(A\cos qx+B\sin qx)$

$y=e^{-1x}(A\cos 3x+B\sin 3x)$

مثال : جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y''-4y'+5y=0$ را تعیین نمائید.

برای $y(0)=1$ و $y'(0)=3$ جواب خصوصی را بدست آورید

$t^2-4t+5=0$

$\Delta=16-20=-4<0 \Rightarrow t=\dfrac{-(-4)\pm\sqrt{-4}}{2(1)}=2\pm 1i$

p q

$y=e^{px}(A\cos qx+B\sin qx)$

$y=e^{2x}(A\cos x+B\sin x)$

$y(0)=e^{2(0)}(A\cos 0+B\sin 0)=1 \Rightarrow A=1$

$y'=2e^{2x}(A\cos x+B\sin x)+(-A\sin x+B\cos x)e^{2x}$

$y'(0)=2(A)+B=3 \Rightarrow B=1$

$y=e^{2x}(\cos x+\sin x)$

ILIA GRAPHIC

Day. Month. Year. Subject.

حالت دوم: معادله مشخصه دارای ریشه مضاعف با $\Delta = a^2 - 4b = 0$

$$t_1 = t_2 = -\frac{a}{2}$$

$$y_1 = e^{t_1 x} \Rightarrow y_1 = e^{-\frac{a}{2}x}$$

بنا برابطه بازگشتی یا روش تغییر متغیر

$$y(x) = c_1 e^{t_1 x} + c_2 x e^{t_1 x}$$

$$y(x) = c_1 e^{-\frac{a}{2}x} + c_2 x e^{-\frac{a}{2}x}$$

مثال: جواب عمومی $y'' - 6y' + 9y = 0$ را بنویسید

$$t^2 - 6t + 9 = 0 \Rightarrow t_1 = t_2 = 3$$

$$y = c_1 e^{t_1 x} + c_2 x e^{t_2 x}$$

$$y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x}$$

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x}$$

Day. Month. Year. Subject.

مثال: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'''-2y''-3y'=0$ را تعیین نمائید.

$$t^3-2t^2-3t=0$$

$$t(t^2\ \ t-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=3 \\ t=-1 \end{cases}$$

$$y=c_1e^{t_1x}+c_2e^{t_2x}+c_3e^{t_3x} \Rightarrow y=c_1e^{0x}+c_2e^{3x}+c_3e^{-x}$$

مثال: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'''-y''=0$ را تعیین نمائید.

$$t^3-t^2=0 \Rightarrow t^2(t-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} t^2=0 \Rightarrow t=0 \quad \text{مضاعف} \\ t-1=0 \Rightarrow t=1 \end{cases}$$

$$y=c_1e^{t_1x}+c_2xe^{t_1x}+c_3e^{t_3x}$$

$$y=c_1e^{0x}+c_2xe^{0x}+c_3e^{x}=c_1+c_2x+c_3e^{x}$$

مثال: جواب عمومی $y'''-2y''-4y'+8y=0$ را بدست آورید.

$$t^3-2t^2-4t+8=0 \Rightarrow t^2(t-2)-4(t-2)=0$$

$$(t-2)(t^2-4)=0 \Rightarrow (t-2)^2(t+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} t=2 \quad \text{مضاعف} \\ t=-2 \end{cases}$$

$$y=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}+c_3e^{-2x}$$

Day. Month. Year. Subject.

مثال: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'''-4y''+5y'=0$ را تعیین کنید.

$$t^3-4t^2+5t=0$$

$$t(t^2-4t+5)=0 \Rightarrow \begin{cases} t_1=0 \\ t_2=2+i \\ t_3=2-i \end{cases} \qquad \begin{aligned} t_2&=p+iq \\ t_3&=p-iq \end{aligned}$$

$$p=2 \qquad q=1$$

$$y=c_1e^{t_1x}+c_2e^{t_2x}+c_3e^{t_3x}$$

$$y=c_1e^{0x}+c_2e^{(2+i)x}+c_3e^{(2-i)x}$$

$$y=c_1+e^{2x}\left(c_2e^{ix}+c_3e^{-ix}\right)$$

$$y=e^{px}(A\cos qx+B\sin qx)$$ برای ریشه موهومی

$$p=2,\ q=1$$

$$y=e^{2x}(A\cos x+B\sin x)$$

$$y=C_1+e^{2x}(A\cos x+B\sin x)$$ یا

$$y=C_1+e^{2x}(C_2\cos x+C_3\sin x)$$

مثال : جواب عمومی $y^{(4)}-y=0$ را بنویسید

$$t^4-1=0 \Rightarrow (t^2+1)(t^2-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} t=\pm 1 \\ t=\pm i \end{cases}$$ مختلط

$t_1=i$ ، $t_2=-i$ ، $t_3=1$ ، $t_4=-1$

$t=p+qi \qquad t_1=0+1i$

$\hookrightarrow p=0 \qquad q=1$

$$y=e^{px}(c_1\cos qx+c_2\sin qx)+c_3e^{t_3x}+c_4e^{t_4x}$$

$$y=e^{0x}(c_1\cos x+c_2\sin x)+c_3e^{1x}+c_4e^{-x}$$

$$y=c_1\cos x+c_2\sin x+c_3e^{x}+c_4e^{-x}$$

نکته : با انتخاب سمبول $D=\frac{d}{dx}$ ، $D^2=\frac{d^2}{dx^2}$ ، $D^3=\frac{d^3}{dx^3},\dots$

معادله دیفرانسیل خطی همگن با ضرایب ثابت

$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\dots+a_ny=0$ را می‌توان زیر نوشت

$(D^n+a_1D^{n-1}+\dots+a_n)y=0$

عبارت داخل پرانتز را با $F(D)$ نمایش می‌دهیم و معادله را معمولاً بصورت $F(D)y=0$ می‌نویسیم و آن را "اپراتور" دیفرانسیل خطی مرتبه n ام می‌نامیم.

(اپراتور یعنی عمل کننده)

Day. Month. Year. Subject.

مثال: معادله دیفرانسیل $y^{(4)}-y'''-4y''+4y'=0$ را می‌توان بصورت $(D^4-D^3-4D^2+4D)y=0$ نوشت و $t^4-t^3-4t+4=0$ معادله مفسر

ریشه های معادله مفسر و ریشه های معادله برابر است پس اگر $F(D)y=0$ و $F(D)$ یک چند جمله‌ای از اپراتور D باشد می‌توانیم ریشه های معادله مفسر را از $F(D)=0$ بدست آوریم.

مثال: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $(D(D-1)(D+3))y=0$ را بنویسید.

$F(D)$ ریشه های معادله مفسر

$$D(D-1)(D+3)=0$$

$$D=0,\ D=1,\ D=-3 \Rightarrow \begin{cases} t_1=0 \\ t_2=1 \\ t_3=-3 \end{cases}$$

$$y=c_1e^{t_1x}+c_2e^{t_2x}+c_3e^{t_3x}$$

$$y=c_1e^{0x}+c_2e^{1x}+c_3e^{-3x}=c_1+c_2e^{x}+c_3e^{-3x}$$

مثال: جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را تعیین کنید.

$$D(D^2+1)(D-2)^3y=0$$

$$t_1=0,\ t_2=i,\ t_3=-i,\ t_4=t_5=t_6=2$$

$$p=0 \quad q=1$$

$$y=c_1e^{t_1x}+e^{px}(c_2\cos qx+c_3\sin qx)+c_4e^{t_4x}+c_5xe^{t_5x}+c_6x^2e^{t_6x}$$

$$y=c_1e^{0x}+e^{0x}(c_2\cos x+c_3\sin x)+c_4e^{2x}+c_5xe^{2x}+c_6x^2e^{2x}$$

$$y=c_1+c_2\cos x+c_3\sin x+(c_4+c_5x+c_6x^2)e^{2x}$$

Day. Month. Year. Subject.

معادلات خطی غیرهمگن مرتبه دوم

ساده‌ترین روش‌ها روش ضرایب نامعین است که در این روش

فقط در مورد معادلات خطی با ضرایب ثابت می‌توان استفاده کرد

$$y''+a_1y'+a_2y=f(x)$$

$f(x)$ تابعی است که در حالات مختلف ذکر می‌شود

حالت اول: اگر $f(x)$ فقط یک چند جمله‌ای از درجه n باشد

مثال: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y''-4y=3$ را بدست آورید

حل: ابتدا جواب عمومی معادله همگن متناظر را پیدا می‌کنیم

$$y''-4y=0$$

$$t^2-4=0 \Rightarrow t=\pm 2$$

$$y=c_1e^{t_1x}+c_2e^{t_2x} \Rightarrow y=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}$$

حال y_p را بدست آورید، چون $f(x)$ (طرف دوم معادله) یک عدد است،

y_p را بصورت یک عدد ثابت در نظر می‌گیریم یعنی $y_p=A$ ، حال y_p و y_p'' را در معادله قرار می‌دهیم

$$y_p=A \Rightarrow y_p''=0$$

$$0-4A=3 \Rightarrow A=-\frac{3}{4}$$

$$y=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}-\frac{3}{4}$$

Day. Month. Year. Subject.

مثال: جواب عمومی $y''-4y'=3$ را بنویسید

$$t^2-4t=0 \Rightarrow t=0,\ t=4$$

$$y=c_1e^{0x}+c_2e^{4x}=c_1+c_2e^{4x}$$

$$f(x)=3$$

$$y_p=A \Rightarrow y'=0,\ y''=0$$

$$0-4(0)=3$$ غیرممکن

لذا y_p را نمی‌توان یک عدد ثابت گرفت

$$y_p=Ax$$

$$y_p'=A,\ y_p''=0 \Rightarrow 0-4A=3 \Rightarrow A=-\frac{3}{4}$$

$$y_p=-\frac{3}{4}x$$

$$y=c_1+c_2e^{4x}-\frac{3}{4}x$$

مثال: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y''+2y'+y=4x^2+1$ را بنویسید

$$y''+2y'+y=0 \Rightarrow t^2+2t+1=0 \Rightarrow t_1=t_2=-1$$

$$y=(c_1e^{-1x}+c_2xe^{-x})$$ است

حال برای بدست آوردن y_p، چون طرف دوم معادله یک چندجمله‌ای از درجه ۲ است

y_p نیز باید یک چندجمله‌ای کامل درجه ۲ انتخاب گردد

$y_p = Ax^2+Bx+C$

$y_p' = 2Ax+B$ ، $y_p'' = 2A$

$2A + \underbrace{4Ax+2B+Ax^2+Bx+C}_{\text{جایگذاری}} \equiv 4x^2+1$

$A=4$ ، $4A+B=0$ $2A+2B+C=0$

$B=-16$ ، $C=25$

$y=(c_1+c_2x)e^{-x}+4x^2-16x+25$

قانون کلی: اگر $f(x)$ (طرف دوم معادله) به فرم یک چندجمله‌ای از درجه n ، باشد

جواب خصوصی را به فرم زیر در نظر می‌گیریم

$y_p = x^m$ (یک چندجمله‌ای کامل از درجه n)

m تعداد ریشه‌های صفر معادلهٔ مشخصه

Day. Month. Year. Subject.

مثال:

$$y''-y'=2x$$

$$t^2-t=0 \Rightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=1 \end{cases}$$ ریشه صفر

$$y_h = c_1 + c_2 e^x$$

۱ ریشه صفر

$$y_p = x^m(\underbrace{Ax+B}_{\text{درجه ۱}})$$

$$y_p = x^1(Ax+B) = Ax^2+Bx$$

$$y_p' = 2Ax+B \quad , \quad y_p'' = 2A$$

$$2A-(2Ax+B) \equiv 2x$$

$$(2A-B)-(2Ax) \equiv 2x \Rightarrow \begin{cases} 2A-B=0 \\ -2A=2 \Rightarrow A=-1 \end{cases}$$

$$B=-2$$

$$y = c_1 + c_2 e^x - x^2 - 2x$$

حالت دوم: اگر $f(x)$ برابر $f(x)=M(x)e^{px}$ باشد

$M(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه n است

Day. Month. Year. Subject.

مثال : جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را تعیین نمائید

$$y'' - 3y' + 2y = 3e^{4x}$$

$$t^2 - 3t + 2 = 0 \Rightarrow t=1 \text{ و } t=2$$

$$y_h = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x}$$

$$y_p = Ae^{4x} \Rightarrow y' = 4Ae^{4x} \quad , \quad y'' = 16Ae^{4x}$$

$$16Ae^{4x} - 3(4Ae^{4x}) + 2(Ae^{4x}) \equiv 3e^{4x}$$

$$6Ae^{4x} \equiv 3e^{4x} \Rightarrow 6A = 3 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

$$y_p = \frac{1}{2} e^{4x}$$

$$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + \frac{1}{2} e^{4x}$$

قانون کلی : اگر $f(x)$ بفرم $f(x) = M(x) e^{px}$ که در آن $M(x)$ یک چند جمله‌ای از درجه n آنگاه $y_p = x^m e^{px}$ (چند جمله‌ای درجه n) ، m تعداد ریشه‌های مساوی p معادله مشخصه ، این قانون برای مرتبه دلخواه n نیز صادق است.

ILIA GRAPHIC

Day. Month. Year. Subject.

مثال: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y''-4y'+4y=5e^{2x}$ را بنویسید

$$t^2-4t+4=0 \Rightarrow t_1=t_2=2$$

$$y_h=(c_1+c_2x)e^{2x}$$

$p=2$ ، دوبار ریشه معادله مفسر می‌باشد پس باید y_p را بصورت زیر انتخاب کرد.

$$y_p=Ax^2e^{2x}$$

$$y'=Ae^{2x}(2x+2x^2)$$

$$y''=2Ae^{2x}(2x^2+4x+1)$$

$$2Ae^{2x}=5e^{2x} \Rightarrow A=\frac{5}{2}$$ در معادله قرار میدهیم

$$y=(c_1+c_2x)e^{2x}+\frac{5}{2}x^2e^{2x}$$

حالت کلی: اگر $f(x)$ بصورت $f(x)=M(x)\cos qx+N(x)\sin qx$

$M(x)$ و $N(x)$ دو چند جمله‌ای

$$y_p=x^m[R(x)\cos qx+S(x)\sin qx]$$

m تعداد ریشه‌های qi معادله مفسر و $R(x)$ و $S(x)$ دو چند جمله‌ای کامل از درجه n ، n بزرگترین درجه بین $M(x)$ و $N(x)$ است

Day. Month. Year. Subject.

مثال: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y''+4y=3\cos 5x$ را بیابید.

$$t^2+4=0 \Rightarrow t=\pm 2i \qquad p=0 ، q=2$$

$$y_h = e^{px}(c_1\cos qx + c_2\sin qx)$$

$$y_h = e^{0}(c_1\cos 2x + c_2\sin 2x) = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x$$

برای تعیین y_p چون $5i$ ریشه معادله مفسر نیست پس $m=0$

$$y_p = x^0[A\cos 5x + B\sin 5x]$$

$$y_p = A\cos 5x + B\sin 5x$$

$$y' = -5A\sin 5x + 5B\cos 5x$$

$$y'' = -25A\cos 5x - 25B\sin 5x$$

$$-25A\cos 5x - 25B\sin 5x + 4(A\cos 5x + B\sin 5x) \equiv 3\cos 5x$$

$$A = -\frac{1}{7} ، B = 0$$

$$\boxed{y = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x - \frac{1}{7}\cos 5x}$$

Day. Month. Year. Subject.

حل معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت بوسیله روش اپراتورها

با انتخاب علامت

$$D=\frac{d}{dx},\quad D^2=\frac{d^2}{dx^2},\quad \dots,\quad D^n=\frac{d^n}{dx^n}$$

معادله دیفرانسیل

$$y^{(n)}+b_1y^{(n-1)}+\dots+b_ny=r(x)$$

بفرم زیر نوشته می‌شود

$$(D^n+b_1D^{n-1}+\dots+D_n)y=r(x)$$

و $F(D)y=r(x)$ قرار می‌دهیم که $F(D)$ یک چندجمله‌ای است از D و به آن چندجمله‌ای اپراتوری می‌گوئیم، $F(D)$ را می‌توان به حاصلضرب عوامل اول تجزیه کرد

$$F(D)=(D-a_1)(D-a_2)\dots(D-a_n)$$

با تجزیه عبارت درنهایت خواهیم داشت

$$(D-a_1)(D-a_2)\dots(D-a_n)y=r(x)$$

$$V_1=(D-a_2)\dots(D-a_n)y$$

معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول

$$(D-a_1)V_1=r(x)\Rightarrow V_1'-a_1V_1=r(x)$$

$$V_1=e^{a_1x}\int r(x)e^{-a_1x}dx$$

$$V_2=(D-a_3)(D-a_4)\dots(D-a_n)y$$

V_1 را در معادله قرار داده

$$(D-a_2)V_2=V_1\Rightarrow V_2'-a_2V_2=V_1$$

خطی مرتبه اول

$$V_2=e^{a_2x}\int V_1e^{-a_2x}dx\quad\dots\quad y_n=e^{a_nx}\int V_{n-1}e^{-a_nx}dx$$

مثال: معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید

$$y'' - 3y' = \sin 2x$$

$$D(D-3)y = \sin 2x$$

$$D=0,\ D=3$$

$$y_h = c_1 e^{0x} + c_2 e^{3x} = c_1 + c_2 e^{3x}$$

برای محاسبه y_p فرض می‌کنیم

$$(D-3)y = v_1$$

$$Dv_1 = \sin 2x \Rightarrow v_1 = -\frac{1}{2}\cos 2x$$

$$\underbrace{(D-3)}_{\text{برای } t=3} y = -\frac{1}{2}\cos 2x$$

$$y_p = e^{3x}\int \left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)e^{-3x}\,dx$$

$$y_p = e^{3x}\left[-\frac{1}{13}e^{-3x}\sin 2x + \frac{3}{26}e^{-3x}\cos 2x\right]$$

$$= \frac{3}{26}\cos 2x - \frac{1}{13}\sin 2x$$

جواب عمومی

$$y = c_1 + c_2 e^{3x} + \frac{3}{26}\cos 2x - \frac{1}{13}\sin 2x$$

Day. Month. Year. Subject.

مثال: معادله دیفرانسیل $(D^2-4D+3)y=1$ را حل کنید.

$(D-1)(D-3)y=1$

$D=1 \;,\; D=3$

جواب عمومی معادله همگن متناظر

$y_h = c_1 e^{x} + c_2 e^{3x}$

برای محاسبه y_p فرض میکنیم

$(D-3)y = v_1$

$(D-1)v_1 = 1$ دیفرانسیل خطی

$D=1$

$v_1 = e^{x}\int 1\, e^{-x}\,dx = e^{x}(-e^{-x}) = -e^{0} = -1$

$(D-3)y=-1$

$D=3$

$y_p = e^{3x}\int (-1)\, e^{-3x}\,dx = \dfrac{e^{3x}(e^{-3x})}{3} = \dfrac{1}{3}$

$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{3x} + \dfrac{1}{3}$

Day. Month. Year. Subject.

مثال: معادله دیفرانسیل $(D-2)^2(D+1)y=x$ را حل نمائید.

$$(D-2)\underbrace{(D-2)(D+1)y}=x$$

$$y_h=c_1e^{-x}+c_2e^{2x}+c_3xe^{2x}$$

$$(D-2)(D+1)y=v_1 \Rightarrow (D-2)v_1=x$$

$$v_1=e^{2x}\int xe^{-2x}dx=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$$

$$(D-2)\underbrace{(D+1)y}_{v_2}=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$$

$$(D+1)y=v_2$$

$$(D-2)v_2=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4} \Rightarrow v_2=e^{2x}\int\left(-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\right)e^{-2x}dx$$

$$v_2=\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}$$

$$\underset{D=-1}{(D+1)y}=\frac{1}{4}x+\frac{1}{4} \Rightarrow y_p=e^{-x}\int\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\right)e^{x}dx=\frac{1}{4}x$$

$$y=c_1e^{-x}+c_2e^{2x}+c_3xe^{2x}+\frac{1}{4}x$$

Day. Month. Year. Subject.

مثال: معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید

$$(D^2+4)y = e^x$$

$$(D+2i)(D-2i)y = e^x$$

$$\hookrightarrow q=2,\; p=0$$

$$y_h = e^{0x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$$

$$(D-2i)y = v_1 \Rightarrow (D+2i)v_1 = e^x$$

$$-2i \qquad \hookrightarrow p=0,\; q=2$$

$$v_1 = e^{-2ix}\int e^x e^{-(-2ix)}\,dx$$

$$v_1 = e^{-2ix}\int e^x e^{2ix}\,dx = \frac{1}{1+2i}\, e^{-2ix} e^{2ix} e^x = \frac{e^x}{1+2i}$$

$$v_1 = \frac{e^x}{1+2i}$$

$$\underbrace{(D-2i)}_{D=2i}y = \frac{e^x}{1+2i}$$

$$y_p = e^{2ix}\int \frac{e^x}{1+2i}\, e^{-2ix}\,dx$$

$$= \frac{1}{1+2i}\cdot\frac{1}{1-2i}\, e^{2ix} e^x e^{-2ix} = \frac{1}{5}e^x$$

$$y = (c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x) + \frac{1}{5}e^x$$

ILIA GRAPHIC

Day. Month. Year. Subject.

مثال : معادله دیفرانسیل زیر را حل نمائید

$$(D^2-3D+2)y=\sin e^{-x}$$

$$(D-1)(D-2)y=\sin e^{-x}$$

ریشه ها ۱ و ۲

$$y_h=c_1e^{x}+c_2e^{2x}$$

$$(D-2)y=v_1 \Rightarrow \underbrace{(D-1)}_{\text{ریشه } 1}v_1=\sin e^{-x}$$

$$v_1=e^{x}\int(\sin e^{-x})e^{-x}dx=e^{x}\cos e^{-x}$$

$$\underbrace{(D-2)}_{\text{ریشه } 2}y=e^{x}\cos e^{-x}$$

$$y_p=e^{2x}\int(e^{x}\cos e^{-x})e^{-2x}dx$$

$$y_p=e^{2x}\int e^{-x}\cos e^{-x}dx=-e^{2x}\sin e^{-x}$$

$$y=c_1e^{x}+c_2e^{2x}-e^{2x}\sin e^{-x}$$

ILIA GRAPHIC

Day. Month. Year. Subject.

حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از سری‌ها

(1) $f_1(x)y'' + f_2(x)y' + f_3(x)y = 0$ حل معادلات به شکل

که f_1 ، f_2 ، f_3 سه چند جمله‌ای برحسب x می‌باشند اهمیت بیشتری دارند که دو معادله بسیار مهم آن به شرح زیر است:

۲) $(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$ معادله لژاندر

۳) $x^2y'' + xy' + (x^2-v^2)y = 0$ معادله بسل

قبل از بحث پیرامون حل معادلات به کمک سری‌ها لازم است به مطالب زیر اشاره گردد:

سری:

مجموع جمله‌های یک دنباله نامتناهی را یک سری می‌نامیم

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} u_i$$

u_1 ، u_2 ، u_3 و ... را جمله‌های سری و u_n را جمله عمومی سری می‌نامیم،

اگر تمام جمله‌های یک سری اعداد باشند، سری را عددی و اگر جمله‌های سری توابعی از x باشند سری را "سری تابع" می‌نامیم.

Day. Month. Year. Subject.

مثال: سری زیر را یک سری عددی می‌نامیم $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 + \dots$

مثال: سری زیر را یک سری تابعی می‌نامیم $\sum_{i=0}^{\infty} x^i = x^0 + x^1 + x^2 + \dots + x^n + \dots$

همگرایی و واگرایی سری‌ها

مجموع n جمله اول سری را با S_n نمایش می‌دهیم

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

اگر $\lim_{n\to\infty} S_n = L$ ، $L \in \mathbb{R}$ باشد اگر همگرا و اگر حد موجود نباشد عدد حقیقی باشد سری را واگرا نامیم.

مثال: $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$

یک سری هندسی با قدرنسبت $\frac{1}{2}$ است

$a = 1$ ، $q = \frac{1}{2}$

$$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q} \Rightarrow S_n = \frac{1\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{2}}$$

$\lim_{n\to\infty} S_n = 2$ سری همگرا

مثال: سری $t + t + t + \dots + t + \dots$ ، $t \neq 0$ یک سری واگرا است

واگرا $S_n = nt \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} nt = \infty$

ILIA GRAPHIC

Day. Month. Year. Subject.

مثال: همگرایی یا واگرایی سری زیر را بررسی کنید.

$$1-1+1-\cdots+(-1)^{n-1}+\cdots$$

$$S_n = \begin{cases} 0 & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \\ 1 & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

$\lim_{n\to\infty} S_n$ موجود نمی‌باشد

(سری واگرا)

قضیه ۱: اگر تعدادی از جمله‌های یک سری را حذف کنیم نوع سری تغییر نمی‌کند.

قضیه ۲: اگر تمام جمله‌های یک سری را در عدد مخالف صفر ضرب کنیم نوع سری تغییر نمی‌کند.

یعنی در سری‌ها با جمله‌های عمومی u_n و au_n هر دو همگرا یا هر دو واگرا می‌باشند.

قضیه ۳: اگر دو سری به l_1 و l_2 همگرا باشند جمع و تفاضل آنها نیز به $l_1 \pm l_2$ همگرا هستند.

قضیه ۴: شرط لازم برای همگرایی یک سری آن است که $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ اما شرط کافی نیست.

مثال: نوع سری زیر را تعیین نمائید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{2n+4}$$

$$a_n = \frac{3n}{2n+4} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{3}{2} \neq 0$$

سری واگرا

Day. Month. Year. Subject.

دستور دالامبر:

در سری با جملات مثبت $\sum_{i=1}^{\infty} u_i = u_1 + u_2 + \cdots$ نسبت جمله

$n+1$ به جمله nام را تشکیل میدهیم و حد این نسبت را وقتی که n به

سمت بینهایت میل می‌کند را تعیین میکنیم و حد فوق را L می‌نامیم

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = L$$

آنگاه:

۱) اگر $0 \le L < 1$ سری همگرا

۲) اگر $L > 1$ سری واگرا

۳) اگر $L = 1$ از این دستور نمی‌توان نوع سری را تعیین کرد

مثال: نوع سری $1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$ را مشخص نمائید

$$u_n = \frac{1}{n!} \quad , \quad u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

سری همگرا

ILIA GRAPHIC

Day. Month. Year. Subject.

مثال: نوع سری زیر را مشخص نمائید.

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}+\cdots$$

$$u_n=\frac{2n-1}{2^n}\ ,\quad u_{n+1}=\frac{2(n+1)-1}{2^{(n+1)}}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2n+2-1}{2^{n+1}}\Big/\frac{2n-1}{2^n}=\frac{2n}{2(2n+1)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{4n+2}\sim\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{4n}=\frac{1}{2}$$

$0<\frac{1}{2}<1$ سری همگرا

دستور کوشی

در سری $u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$ با جمله‌ها مثبت

$\sqrt[n]{u_n}$ جمله عمومی را حساب کرده و سپس حد آن وقتی که $n\to\infty$ تعیین می‌کنیم

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=L$$

۱) اگر $0<L<1$ سری همگرا

۲) اگر $L>1$ سری واگرا

۳) اگر $L=1$ این آزمون مناسب نیست

Day. Month. Year. Subject.

قضیه لایبنیتز : اگر در یک سری متناوب

$u_1 > u_2 > u_3 \cdots > u_n > u_{n+1} > \cdots$

و $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$

آنگاه سری همگرا است و مقدار آن از جمله اول بیشتر نیست.

تعریف : یک سری متناوب است که جمله های آن یکی در میان مثبت و منفی باشد.

$u_1, -u_2, u_3, -u_4, \ldots, (-1)^{n+1} u_n, \ldots$

مثال : نوع سری $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots+(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{2n-1}\right)+\cdots$ را مشخص کنید.

$1 > \frac{1}{3} > \frac{1}{5} \cdots$ عددها بدون علامت

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2n-1} = 0$ سری همگرا

مثال : نوع سری $1-\frac{2}{7}+\frac{3}{12}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{n}{4n-5}+\cdots$ را تعیین کنید

$1 > \frac{2}{7} > \frac{3}{12} > \cdots$

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{4n-5} = \frac{1}{4} \neq 0$

سری واگرا

Day. Month. Year. Subject.

سری با جمله‌ها مثبت و منفی

اگر در یک سری هم جمله‌ها مثبت و هم جمله منفی داشته باشیم آنرا یک سری با جمله‌ها مثبت و منفی می‌نامیم و چون با مثبت و منفی بودن جمله‌ها ترتیبی نداریم لذا برای همگرایی سری نمی‌توان دستوری بیان کرد لذا فقط شرط کافی برای همگرایی این سری را بیان می‌کنیم.

قضیه: شرط کافی برای همگرایی سری با جمله‌ها مثبت و منفی آنست که سری حاصل از قدر مطلق جمله‌ها همگرا باشد.

تذکر: این شرط لازم نیست یعنی سری‌ها با جمله‌ها مثبت و منفی وجود دارند که همگرا هستند ولی سری حاصل از قدر مطلق جمله‌ها واگرا باشند.

تعریف: سری $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ را همگرای مطلق می‌نامیم اگر سری $\sum_{n=1} |u_n|$ همگرا باشد.

تعریف: اگر سری $\sum u_n$ همگرا باشد ولی سری $\sum |u_n|$ واگرا باشد سری $\sum u_n$ را همگرای مشروط می‌نامیم.

Day. Month. Year. Subject.

مثال: همگرایی سری زیر را بررسی نمائید

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{n\pi}{3}}{n^2} = \frac{\frac{1}{2}}{1^2} - \frac{\frac{1}{2}}{2^2} \ldots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos\frac{n\pi}{3}}{n^2} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

از طرفی میدانیم $\sum \frac{1}{n^2}$ یک سری p است و $p=2$ پس سری همگرا است.

لذا سری قدر مطلق نیز همگرا است و در نتیجه سری $\sum_{n=1} \frac{\cos\frac{n\pi}{3}}{n^2}$ همگرا است.

سری تابع: یک سری که جملههای آن توابعی از متغیر x میباشند سری تابع نامند

$$\sum_{i=1}^{\infty} u_i(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$$

واضح است که وقتی به x مقادیر مختلف را نسبت دهیم سریهای عددی متفاوتی خواهیم داشت که برخی از آنها همگرا و برخی منحنی است. واگرا باشند مجموعه مقادیر x را که به ازای آنها سری همگرا باشد «میدان همگرایی» سری می نامیم.

ILIA GRAPHIC

Day. Month. Year. Subject.

سری توانی : از مهمترین انواع سریهای تابع سری توانی است

که به فرم $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$ یا

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots$$ می‌باشد

تعیین شعاع همگرایی به روش دالامبر

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1} x^{n+1}}{c_n x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} |x| \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| < 1$$

شرط همگرایی

با فرض $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \frac{1}{R}$ خواهیم داشت

$$|x| \frac{1}{R} < 1 \Rightarrow |x| < R$$

یعنی فاصله $(-\infty, +\infty)$ میدان همگرایی می‌باشد

تذکر : به ازای $x = R$ و $x = -R$ ممکن است سری همگرا یا واگرا باشد که

بایستی مستقیماً بررسی شود و عدد R را شعاع همگرایی می‌نامیم.

مثال : شعاع همگرایی سری زیر را تعیین نمائید

$$\sum \frac{x^n}{n+1}$$

$$\frac{1}{R} = \lim \left| \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} \right| = 1 \Rightarrow R = 1$$

ILIA GRAPHIC

Day. Month. Year. Subject.

مثال: شعاع همگرایی سری زیر را تعیین نمائید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n!\, x^n = 1 + x + 2x^2 + \cdots$$

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)!}{n!} \right| = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty$$

و $R = 0$ یعنی سری فقط به ازای $x = 0$ همگرا می‌شود.

سری تیلور و ماکلورن (مک لورن)

فرض کنیم تابع $f(x)$ تابعی باشد که خود و تمام مشتقاتش در نقطه‌ای از اطراف $x = x_0$ موجود باشد می‌خواهیم این تابع را نسبت به توانهای صعودی $x - x_0$ بنویسیم

$$f(x) = C_0 + C_1 (x - x_0) + C_2 (x - x_0)^2 + \cdots + C_n (x - x_0)^n + \cdots$$

$$f(x_0) = C_0$$

بایستی C_1، C_2، ... را تعیین نمائیم

$$C_1 = f'(x_0)$$

$$C_2 = \frac{f''(x_0)}{2!} \quad , \quad C_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)(x - x_0)}{1!} + \frac{f''(x_0)(x - x_0)^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n}{n!} + \cdots$$

که عبارت فوق را سری تیلور نامیم و اگر فرض کنیم $x_0 = 0$ آنگاه

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)\,x}{1!} + \frac{f''(0)\,x^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)\,x^n}{n!} + \cdots$$

که رابطه فوق را بسط ماکلورن نامند

Day. Month. Year. Subject.

مثال : مک لورن $y=e^x$ را بنویسید

$$f(x)=e^x$$

$$f'(x)=e^x \quad f''(x)=e^x \ \dots \quad f^{(n)}(x)=e^x$$

$$f(0)=1 , \quad f'(0)=f''(0)=\dots=f^{(n)}(0)=e^0=1$$

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)x}{1!}+\frac{f''(0)x^2}{2!}+\dots+\frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}+\dots$$

$$f(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\dots$$

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}\right|=0$$

و $R=\infty$ یعنی به ازای جمیع مقادیر x همگرایی وجود دارد.

سری مک لورن $y=\cos x$ را تعیین نمائید

$$f(x)=\cos x$$

$$f'(x)=-\sin x \qquad f(0)=1 , \ f'(0)=0$$

$$f''(x)=-\cos x \qquad f''(0)=-1 , \ f'''(0)=0$$

$$f'''(x)=\sin x \qquad f^{(4)}(0)=1 , \ f^{(5)}(0)=0$$

$$f^{(4)}(x)=\cos x$$

(سری بر حسب x) :

$$f(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+\dots$$

$$\frac{1}{R}=\lim\left|\frac{2n!}{(2n+2)!}\right|=0 \qquad R=\infty$$

به ازای جمیع مقادیر x همگرایی برقرار است.

Day. Month. Year. Subject.

مثال: سری مک لورن $y=\sin x$ را تعیین نمائید

$$y=\sin x$$

$$y'=\cos x \qquad y''=-\sin x \qquad y'''=-\cos x \qquad y^{(4)}=\sin x$$

$$f(0)=0 \,،\; f'(0)=1 \,،\; f''(0)=0 \,،\; f'''(0)=-1 \,،\; f^{(4)}(0)=0 ,\ldots$$

(توان فرد x)
$$f(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$$

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2n+1)!}{(2(n+1)+1)!}\right|=0$$

$$R=\infty$$

به ازای جمیع مقادیر x همگرا است

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$$

ILIA GRAPHIC

۱۰۶

Day. Month. Year. Subject.

«فرمول اولر»

می‌دانیم $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$

به جای x مقدار ix را قرار می‌دهیم

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \dots + \frac{(ix)^n}{n!} + \dots$$

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} + \dots$$

$$i^2 = 1 \ , \ i^3 = -i \ , \ i^4 = 1 \ , \ i^5 = i \ , \dots$$

$$e^{ix} = \underbrace{\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots\right)}_{\cos x} + i\underbrace{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\right)}_{\sin x}$$

$$\boxed{e^{ix} = \cos x + i \sin x}$$

ضمناً اگر قرار دهیم $(-ix)$ خواهیم داشت

$$\boxed{e^{-ix} = \cos x - i \sin x}$$

ILIA GRAPHIC

Day. Month. Year. Subject.

چندین بسط با شعاع همگرایی

۱) $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots \quad , R = 1$

۲) $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots \quad , R = 1$

۳) $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots \quad , R = 1$

۴) $\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots \qquad R = \infty$

۵) $\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots \qquad R = \infty$

۶) $\operatorname{Arc\,Sin} x = \sin^{-1} x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \times 3}{2 \times 4} \frac{x^5}{5} + \frac{1 \times 3 \times 5}{2 \times 4 \times 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \dots \qquad R = 1$

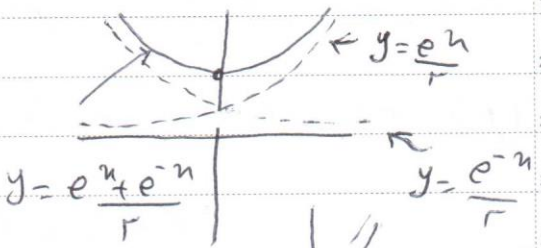
۷) $\operatorname{Arc\,Cos} x = \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \times 3}{2 \times 4} \frac{x^5}{5} + \dots\right) \qquad R = 1$

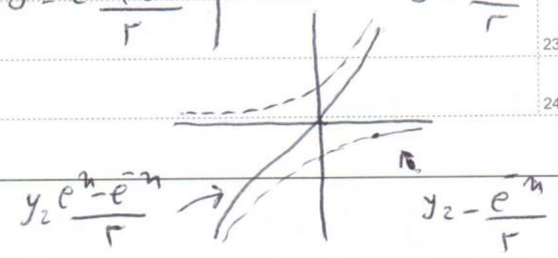
۸) $\operatorname{Arc\,tanh} x = \tanh^{-1} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots \quad , R = 1$

۹) $\operatorname{Arc\,Coth} x = \coth^{-1} x = \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} + \dots \quad , |x| > 1$

$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$





Day. Month. Year. Subject.

حل معادلات دیفرانسیل به کمک سری توانی

در مورد حل معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم با ضرائب متغیر بصورت زیر اقدام می کنیم. برای حل این معادلات جواب را بفرم سری توانی

$$1)\quad y=\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$$

$$2)\quad \sum_{m=0}^{\infty} c_m (x-a)^m = c_0 + c_1 (x-a) + c_2 (x-a)^2 + \dots$$

در نظر می گیریم، ابتدا باید تمام توابع موجود در معادله دیفرانسیل را بفرم سری توانی بنویسیم و سپس y و مشتقش را در معادله دیفرانسیل قرار دهیم و اگر ها با هم قرار دادن ضرائب x ها هم توان، ضرائب سری توانی را بدست آوریم

مثال: معادله دیفرانسیل زیر را حل نمائید

$$1)\quad y' - 3xy = x \quad , \quad y(0)=1$$

حل: توابع موجود در این معادله یعنی x و $-3xy$ چند جمله ای هستند و از طرفی هر چند جمله ای خود بسط مک لورن است لذا لازم نیست که توابع را بفرم سری توانی بنویسیم، لذا جواب معادله را بفرم زیر در نظر می گیریم

$$2)\quad y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots$$

$$y' = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \dots$$

۱۰۹

Day. Month. Year. Subject.

با جایگذاری y و y' در معادله فرض مسئله خواهیم داشت

$$c_1+2c_2x+3c_3x^2+\dots+(n+1)c_{n+1}x^n+\dots-3x(c_0+c_1x+c_2x^2+\dots+c_nx^n+\dots)$$

$$=x$$

ضریب x: $c_1=0$ ، $2c_2-3c_0=1 \Rightarrow c_2=\frac{1}{2}(3c_0+1)$

ضریب x^2: $c_3=c_1=0$

ضریب x^n ، $c_{n+1}=\frac{3}{n+1}c_{n-1}$ ، $n\geq 2$ (۴)

ضریب x^n را رابطه بازگشتی می‌نامیم و با توجه به این رابطه بقیه ضرایب را بدست می‌آوریم

ضرایب فرد صفرند $c_5=c_7=c_9=\dots=c_{2n+1}=0$

$$c_4=\frac{3}{4}c_2=\frac{3}{2(4)}(3c_0+1)$$

$$c_6=\frac{3}{6}c_4=\frac{3^2}{2(4)(6)}(3c_0+1)$$

و جواب عمومی بنوان زیر است

$$y=c_0+(3c_0+1)\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2\times4}x^4+\frac{3^2}{2\times4\times6}x^6+\dots\right)$$

(ب) با توجه به اینکه $y(0)=1$ پس $c_0=1$ و جواب خصوصی بصورت زیر است

$$y=1+4\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2\times4}x^4+\dots\right)$$

ILIA GRAPHIC

Day. Month. Year. Subject.

مثال: معادله دیفرانسیل زیر را حل نمایید.

$$xy' - 3y = 3$$

حل: جواب را بصورت توانی زیر در نظر می‌گیریم

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + \dots$$

$$y' = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \dots + n c_n x^{n-1} + \dots$$

y و y' را در معادله قرار می‌دهیم

$$x(c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \dots + n c_n x^{n-1} + \dots) - 3(c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n + \dots) = 3$$

$-3c_0 = 3 \Rightarrow c_0 = -1$ (ضریب x^0)

$c_1 - 3c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = 0$ ضریب x^1

$2c_2 - 3c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$ x^2 "

$3c_3 - 3c_3 = 0$ $0 = 0$ مبهم

رابطه بالا به ازای جمیع مقادیر c_3 برقرار است لذا c_3 بعنوان C پارامتر ما باقی می‌ماند

$(n-3)c_n = 0$ (ضریب x^n)

$$y = -1 + c x^3$$ جواب عمومی

مثال: معادله دیفرانسیل زیر را حل نمایید.

$$xy' - (x+2)y = -2x^2 - 2x$$

حل: جواب را بصورت سری توانی در نظر می‌گیریم

$$y = \underbrace{c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + \dots}_{I}$$

$$y' = \underbrace{c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \dots + n c_n x^{n-1} + \dots}$$

Day. Month. Year. Subject.

$$x(\overset{\text{معادله ۲}}{\text{II}}) - (x+2)(\overset{\text{معادله ۱}}{\text{I}}) = -2x^2 - 2x$$

y و y' را در معادله قرار میدهیم

$$x(c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + \dots + nc_nx^{n-1} + \dots) - (x+2)(c_0 + c_1x + \dots)$$
$$= -2x^2 - x$$

$c_0 = 0$ ضریب x^0

$c_1 = 2$ x "

$(2-2)c_2 - c_1 = -2 \Rightarrow 0c_2 = 0$ مهم

رابطه بالا به ازای جمیع مقادیر c_2 درست میباشد و c_2 محاسبه نمیشود لذا c_2 عنوان پارامتر مسأله میباشد

$$(n-2)c_n - c_{n-1} = 0$$

$$c_n = \frac{c_{n-1}}{n-2}, \quad n>2 \Rightarrow \begin{cases} c_3 = \frac{c_2}{1} \\ c_4 = \frac{c_3}{2} = \frac{c_2}{2\times1} = \frac{c_2}{2!} \end{cases}$$

$$c_5 = \frac{c_4}{3} = \frac{c_2}{3(2!)} = \frac{c_2}{3!}$$

$$c_n = \frac{c_2}{(n-2)!}, \quad n>2$$

$$y = 0 + 2x + c_2x^2 + c_2x^3 + \frac{c_2x^4}{2!} + \frac{c_2x^5}{3!} + \dots$$

$$y = 0 + 2x + c_2x^2\underbrace{\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots\right)}$$

$$y = 2x + c_2x^2e^x$$

ILIA GRAPHIC

توجه: در مثال‌ها قبل شرط اولیه بصورت $y(0)=y_0$

فرض شده به همین دلیل جواب را بفرم $y=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

در نظر می‌گرفتیم، ولی اگر بخواهیم جواب را بصورت سری توانی

برحسب توانهای $x-a$ بنویسیم یعنی اگر شرط اولیه بصورت $y(a)=y_0$

در اینصورت جواب را بفرم $y=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ در نظر می‌گیریم

و با تغییر متغیر $X=x-a$ ، $dX=dx$

$$\frac{dY}{dX}=\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d^2Y}{dX^2}=\frac{d^2y}{dx^2}$$

جواب بفرم $y=\sum_{n=0}^{\infty} c_n X^n$ می‌باشد و روش حل همان روش قبلا است

و بعد از آنکه جواب سری برحسب X بدست آمد به جای X ها

قرار میدهیم $x-a$

Day. Month. Year. Subject.

مثال : جواب معادله دیفرانسیل زیر را برحسب توانهای $x-1$ بدست آورید

1) $xy' - y = x$

$X = x-1$ ، $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dX} = y'$ (۲

$x = X+1$

$(X+1)\frac{dy}{dx} - y = X+1$ (۳

$y = C_0 + C_1X + C_2X^2 + C_3X^3 + \dots + C_nX^n + \dots$ (۴

$\frac{dy}{dX} = C_1 + 2C_2X + 3C_3X^2 + \dots + nC_nX^{n-1} + \dots$ (۵

با جایگذاری ۴ و ۵ در ۳ داریم

$C_1X + 2C_2X^2 + 3C_3X^3 + \dots + nC_nX^n + \dots$

$+C_1 + 2C_2X + 3C_3X^2 + \dots + (n+1)C_{n+1}X^n + \dots$

$-C_0 - C_1X - C_2X^2 - C_3X^3 - \dots - C_nX^n - \dots = X+1$

$C_1 - C_0 = 1 \Rightarrow C_1 = C_0 + 1$ ضریب x^0

$C_1 + 2C_2 - C_1 = 1 \Rightarrow C_2 = \frac{1}{2}$ ضریب x

$3C_3 + C_2 = 0 \Rightarrow C_3 = -\frac{C_2}{3} = -\frac{1}{6}$ ضریب x^2

$(n+1)C_{n+1} + (n-1)C_n = 0$ ضریب x^n

۱۱۴

Day. Month. Year. Subject.

رابطه بازگشتی $C_{n+1} = -\frac{n-1}{n+1} C_n \qquad n \geq 2$

$C_4 = -\frac{2}{4} C_3 = \frac{1}{12}$

$C_5 = -\frac{3}{5} C_4 = -\frac{1}{20}$

وجواب عبارتست از

$y = C_0 + (C_1+1)x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4 \ldots$

وچون $x = x-1$

$y = C_0 x + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} - \frac{(x-1)^3}{6} + \frac{(x-1)^4}{12} - \frac{(x-1)^5}{20} + \ldots$

در ادامه میخواهیم شعاع همگرایی را تعیین کنیم

$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n-1}{n+1}\right| = 1$

توجه: شعاع همگرایی را هم میتوان از رابطه بازگشتی بدست می‌آوریم

$|x| < 1$ یا $|x-1| < 1 \Rightarrow -1 < x-1 < 1$

$0 < x < 2$

Day. Month. Year. Subject.

تعریف : تابع $f(x)$ را در نقطه $x=a$ تحلیلی نامیم اگر $f(x)$ در نقطه $x=a$ دارای بسط تیلور با $R>0$ باشد.

قضیه : اگر در معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم

$$y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = P_3(x)$$

توابع $P_1(x)$ ، $P_2(x)$ ، $P_3(x)$ هر سه در نقطه $x=a$ تحلیلی باشند آنگاه هر جواب این معادله در نقطه $x=a$ تحلیلی خواهد بود.

هدف اصلی در این بخش حل دو معادله بسیار مهم زیر است

معادله لژاندر $\quad (1-x^2)y'' - 2xy' + m(m+1) = 0$

" بسل $\quad x^2y'' + xy' + (x^2-v^2)y = 0$

تعریف : در معادله دیفرانسیل $f_1(x)y'' + f_2(x)y' + f_3(x)y = 0$ که در آن f_1 ، f_2 ، f_3 چند جمله‌ای برحسب x باشند نقطه $x=a$ یک نقطه معمولی نامیده میشود اگر $f_1(a) \neq 0$ باشد در غیر اینصورت نقطه $x=a$ را یک نقطه "منفرد" می‌نامیم.

ILIA GRAPHIC

Day. Month. Year. Subject.

قضیه: اگر $x=a$ یک نقطه معمولی دیفرانسیل زیر باشد

$f_1(x)y''+f_2(x)y'+f_3(x)y=0$ آنگاه معادله دارای جواب بفرم سری توانی برحسب توانهای $x-a$ خواهد بود، جواب عمومی بفرم زیر نوشت

$y=c\left((x-a)\right.$ یک سری توانی برحسب توانهای $\left.\right)+c'\left((x-a)\right.$ یک سری توانی برحسب توانهای $\left.\right)$

که هر دو سری مستقل خطی اند

مثال: معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید

1) $y''-xy'+y=0$

حل: ضرایب y''، y'، y سه چند جمله‌ای هستند. y'' ضریب $f_1(x)$

و $f_1(x)=1$ در $f_1(0)=1$ پس $x=0$ یک نقطه معمولی است لذا معادله (1) دارای جواب بفرم سری توانی زیر است

2) $y=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\dots+c_nx^n+\dots$

3) $y'=c_1+2c_2x+3c_3x^2+\dots+nc_nx^{n-1}+\dots$

4) $y''=2c_2+6c_3x+\dots+n(n-1)c_nx^{n-2}+\dots$

با جایگذاری ۲ و ۳ و ۴ در معادله (1) خواهیم داشت

$2c_2+3(2)c_3x+4(3)c_4x^2+\dots+(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n+\dots$

$-c_1x-2c_2x^2-\dots-nc_nx^n-\dots+c_0+c_1+\dots+c_nx^n+\dots=0$

Day. Month. Year. Subject.

$2c_2 + c_0 = 0 \Rightarrow c_2 = -\frac{c_0}{2}$ ضریب x^0

$3(2)c_3 - c_1 + c_1 = 0 \Rightarrow c_3 = 0$ ضریب x

رابطه بالا به ازای جمیع مقادیر c_1 برقرار است پس c_1 به عنوان پارامتر سالم می‌باشد

$4 \times 3 c_4 - c_2 = 0 \Rightarrow c_4 = \frac{c_2}{4 \times 3} = -\frac{c_0}{4!}$ ضریب x^2

$(n+2)(n+1)c_{n+2} - (n-1)c_n = 0 \Rightarrow c_{n+2} = \frac{n-1}{(n+2)(n+1)} c_n$ رابطه بازگشتی

با توجه به رابطه بازگشتی چون $c_3 = 0$ پس کلیه ضرایب فرد صفرند.

$c_5 = c_7 = \dots = c_{2n+1} = 0$

$c_6 = \frac{3}{6 \times 5} c_4 = -\frac{3}{6!} c_0$ ، $c_8 = \frac{5}{8 \times 7} c_6 = -\frac{15}{8!} c_0$

و جواب عمومی برابر خواهد بود

$$y = c_0\left(1 - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} - \frac{3x^6}{6!} - \frac{15}{8!}x^8 - \dots\right) + c_1 x$$

شعاع همگرایی

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{c_{n+2}}{c_n} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{n-1}{(n+2)(n+1)} \right| = 0$$

و $R = \infty$ ، لذا به ازای جمیع مقادیر x جواب درست است.

ILIA

Day. Month. Year. Subject.

مثال : معادله دیفرانسیل زیر را حل نمائید

$$y'' + 2x^2 y = 0$$

حل : $f_1(x) = 1$ و $f_1(0) = 1$ یعنی $x = 0$ یک نقطه معمولی است

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + \dots$$

$$y' = c_1 + 2c_2 x + \dots + n c_n x^{n-1} + \dots$$

$$y'' = 2c_2 + 3(2)c_3 + \dots + n(n-1) c_n x^{n-2} + \dots$$

با جایگذاری در معادله فرض حاصله خواهیم داشت :

x^0 ضریب $c_2 = 0$

x^1 " $c_3 = 0$

x^2 ضریب $12c_4 + 2c_0 = 0 \Rightarrow c_4 = -\frac{c_0}{6}$

x^{n+2} " $(n+4)(n+3)c_{n+4} + 2c_n = 0 \Rightarrow c_{n+4} = -\frac{2}{(n+4)(n+3)} c_n$

$$c_6 = -\frac{2}{6\times 5} c_2 = 0$$

$c_7 = -\frac{2}{7\times 6} c_3 = 0$ ، $c_8 = -\frac{2}{8\times 7} c_4 = \frac{c_0}{168}$

$c_9 = -\frac{2}{9\times 8} c_5 = \frac{c_1}{360}$ به همین ترتیب بقیه ضرایب را هم خواهیم داشت

$$y = c_0\left(1 - \frac{x^4}{6} + \frac{x^8}{168} \dots\right) + c_1\left(x - \frac{x^5}{10} + \frac{x^9}{360} - \dots\right)$$

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+4}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2}{(n+4)(n+3)}\right| = 0$$

و $R = \infty$ برای جمیع مقادیر x جواب درست است

Day. Month. Year. Subject.

تعریف: برای پیدا کردن جواب معادله دیفرانسیل بصورت سری تیلور از روش زیر که روش لیبنیتز - مک لورن موسوم است و به آن روش مشتقات متوالی هم می‌گوئیم استفاده کرد مخصوص وقتی که معادله با شرایط اولیه داده شده در اینصورت جواب را بفرم

$$y = y(a) + \frac{(x-a)}{1!}y'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}y''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!}y^{(n)}(a) + \dots$$

در نظر می‌گیریم

مثال: معادله دیفرانسیل $y'' - yy' = x^2$ با شرط $y(0)=1$ و $y'(0)=1$ را حل کنید. (1)

2) $y''(0) - y(0)\,y'(0) = 0^2 \Rightarrow y''(0) = 1$

3) $y''' - y'y' - y''(y) = 2x$ مشتق می‌گیریم

$$y'''(0) = \underbrace{(y'(0))^2}_{1} + \underbrace{y''(0)\,y(0)}_{1} + 2(0) = 2 \Rightarrow y'''(0) = 2$$

$$y^{(4)} = 3y'y'' + yy''' - 2$$ (مشتق می‌گیریم از ۳)

$$y^{(4)}(0) = 3 + 2 - 2 = 3$$

و بسط مک لورن بصورت زیر خواهد بود

$$y = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{2x^3}{3!} + \frac{3x^4}{4!} + \dots$$

۱۲۰

Day. Month. Year. Subject.

مثال: معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید:

1) $(1-x^2)y'' - 5xy' - 3y = 0$

$y(0)=1 \,,\, y'(0)=1$

با توجه به شرایط اولیه

$$(1-0)y''(0) - 5(0)\underbrace{y'(0)}_{1} - 3\underbrace{y(0)}_{1} = 0 \Rightarrow y''(0) = 3$$

مشتق گیری از معادله (۱)

$$-2xy'' + y'''(1-x^2) - 5(1)y' - 5xy'' - 3y' = 0$$

$$-\underbrace{2(0)y''}_{0} + y'''(1-0) - 5(1)\underbrace{(y'(0))}_{1} - 5(0)\underbrace{y''(0)}_{0} - 3\underbrace{y'(0)}_{1} = 0$$

$$y'''(0) = 5 + 3 = 8$$

و مشتق مرتبه nام را حساب کنیم (مطابق فرمول لیبنیتز)

$$(1-x^2)y^{(n+2)} - x(2n+5)y^{(n+1)} - (n+1)(n+3)y^{(n)} = 0$$

$$y^{(4)}(0) - 15y^{(2)}(0) = 0 \Rightarrow y^{(4)}(0) = 45$$

$$y = y(0) + xy'(0) + \frac{x^2}{2!}y''(0) + \frac{x^3}{3!}y'''(0) + \dots$$

$$y = 1 + x + \frac{3x^2}{2!} + \frac{8x^3}{3!} + \frac{45x^4}{4!} + \dots$$

$$(1-x^2)y'' - 5xy' - 3y = 0$$

$$(-2x)y'' + (1-x^2)y''' - 5y' - 5xy'' - 3y' = 0$$

$$(1-x^2)y''' - x(2+5)y'' - (5+3)y' = 0$$

$$(1-x^2)y'''' + (-2x)y''' - (2+5)y'' - x(2+5)y''' - (5+3)y'' = 0$$

$$(1-x^2)y'''' - x(2+2+5)y''' - (\underbrace{2+5+5+3}_{5\times 3=(2+3)(2+1)})y'' = 0$$

$$(1-x^2)y''''' + (-2x)y^{(4)} - (2+2+5)y''' - x(2+2+5)y^{(4)} - (\underbrace{2+5+5+3}_{5\times 3=(3+2)(2+1)})y''' = 0$$

$$(1-x^2)y^{(5)} - x(\underbrace{2+2+2}_{3(2)}+5)y^{(4)} - (\underbrace{2+2+2+5+5+5+3}_{24})y''' = 0$$

$5=3+2$ $\qquad 4=3+1$ $\qquad 6\times 4=(3+3)(3+1)$

$$(1-x^2)y^{(n+2)} - x(2n+5)y^{(n+1)} - (n+3)(n+1)y^{(n)} = 0$$

تابع گاما:

تابع گامای α را با نماد $\Gamma(\alpha)$ نمایش میدهیم که بصورت زیر تعریف میشود

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx$$

محاسبه انتگرال بالا به ازای α های مختلف مشکل است. برای α های متعلق به بازه $[1,2]$ جدول موجود است و با استفاده از رابطه ای که در زیر اثبات میگردد $\Gamma(\alpha)$ برای $\alpha\notin[1,2]$ را بر حسب $\Gamma(\beta)$ که $\beta\in[1,2]$ است بیان می‌نماییم

جزء به جزء

$$\Gamma(\alpha+1)=\int_0^\infty x^{\alpha}e^{-x}\,dx$$

$$dv=e^{-x}dx \Rightarrow v=-e^{-x}$$

$$u=x^{\alpha}\Rightarrow du=\alpha x^{\alpha-1}dx$$

$$\Gamma(\alpha+1)=\left[-x^{\alpha}e^{-x}\right]_0^\infty+\alpha\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx$$

و میدانیم

$$\lim_{x\to\infty}x^{\alpha}e^{-x}=0$$

در نتیجه

$$\boxed{\Gamma(\alpha+1)=\alpha\,\Gamma(\alpha)}$$

مثال : مقدار $\Gamma(1)$ را حساب کنید

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-x}\,dx=-e^{-x}\Big|_0^\infty=1$$

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty x^{1-1}e^{-x}\,dx=\int_0^\infty x^0e^{-x}\,dx=\int_0^\infty 1e^{-x}\,dx=[-e^{-x}]$$

مثال : $\Gamma(4)$ را حساب کنید

$$\Gamma(4)=\Gamma(3+1)=3\Gamma(3)=3\Gamma(2+1)=3(2)\Gamma(2)$$

$$=6\Gamma(2)=6\Gamma(1+1)=6(1)\Gamma(1)=6(1)(1)=6$$

مثال : مقدار $\Gamma(5{,}3)$ را حساب کنید

$$\Gamma(5{,}3)=\Gamma(4{,}3\quad)=4{,}3\,\Gamma(4{,}3)=4{,}3\,\Gamma(3{,}3+1)$$

$$=(4{,}3)(3{,}3)\Gamma(3{,}3)=(4{,}3)(3{,}3)\Gamma(2{,}3+1)$$

$$=(4{,}3)(3{,}3)(2{,}3)\Gamma(2{,}3)=(4{,}3)(3{,}3)(2{,}3)\Gamma(1{,}3+1)$$

$$=(4{,}3)(3{,}3)(2{,}3)(1{,}3)\Gamma(1{,}3)$$

در جدول برابر است ۰/۸۹۷۴۷۱

Day. Month. Year. Subject.

تعریف:

$\Gamma(\alpha+1) = \alpha!$

مقدار $0!$ را حساب کنید

$0! \quad \Gamma(1)=1$

$\Gamma(1) = \Gamma(0+1) = 0! = 1$

مثال: $(3/1)!$ را حساب کنید

$(3/1)! = \Gamma(3/1+1) = 3/1\,\Gamma(3/1) = 3/1\,\Gamma(2/1+1)$

$= 3/1\,(2/1)\,\Gamma(2/1) = 3/1\,(2/1)\,\Gamma(1/1+1) = (3/1)(2/1)(1/1)\,\Gamma(1/1)$

$\Gamma(1/1) = /951351$

$(3/1)! = (3/1)(2/1)(1/1)(/951351)$

مثال: مقدار $(-1/6)!$ را حساب کنید.

$(-1/6)! = \Gamma(-1/6+1) = \Gamma(-/6) = \dfrac{\Gamma(/4)}{-(/6)} = \dfrac{\Gamma(1/4)}{-/6(/4)} = \dfrac{/887264}{-/24}$

دلیل

$\underbrace{\Gamma(-/6+1)} = (-/6)\,\Gamma(-/6)$

$\Gamma(/4) = (-/6)\,\Gamma(-/6) \Rightarrow \Gamma(-/6) = \dfrac{\Gamma(/4)}{-/6}$

$\Gamma(1/4) = \Gamma(/4+1) = /4\,\Gamma(/4) \Rightarrow \Gamma(/4) = \dfrac{\Gamma(1/4)}{/4}$

Day. Month. Year. Subject.

دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی

فرض می‌کنیم $y_1 , y_2 , \dots , y_n$ توابعی از یک متغیر مستقل مانند x باشند
یک دستگاه معادلات دیفرانسیل را خطی گوییم، اگر هر یک از معادلات دستگاه،
یک معادله دیفرانسیل خطی باشد، در زیر به چند روش حل دستگاه اشاره می‌کنیم

۱) روش حذف: در این روش با حذف یکی از توابع مجهول و مشتقات
این توابع معادله‌ای بدست می‌آوریم که فقط شامل یک تابع مجهول و مشتقات
آن باشد. با حل این معادله یکی از توابع مجهول بدست می‌آید سپس سایر
توابع مجهول را بدست می‌آوریم.

مثال: دستگاه معادلات

$$(1)\quad \begin{cases} a)\ y_1' = 2y_1 - 5y_2 \\ b)\ y_2' = 5y_1 - 6y_2 \end{cases}$$

را حل کنید

حل: ابتدا از یکی از معادلات دستگاه مثلا (a) یکبار مشتق می‌گیریم

$$(2)\quad y_1'' = 2y_1' - 5y_2'$$

و سپس از این معادله y_2 را حساب می‌کنیم

$$(3)\quad y_2 = \frac{2}{5}y_1 - \frac{1}{5}y_1'$$

Day. Month. Year. Subject.

در (۲) بجای y_2' ، (b) را قرار میدهیم و بجای y_2 در (b)

و (۳) را میگذاریم

$$y_1'' = 2y_1' - 5\left(5y_1 - 6\left(\frac{2}{5}y_1 - \frac{1}{5}y_1'\right)\right) = -4y_1' - 13y_1 \quad (4)$$

$$y_1'' = -4y_1' - 13y_1$$

معادلهٔ دیفرانسیل همگن مرتبه دوم خطی (با ضرایب ثابت)

$$y_1'' + 4y_1' + 13y_1 = 0$$

$$t^2 + 4t + 13 = 0 \Rightarrow t = -2 \pm 3i$$

$$y_1 = e^{-2x}\left(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x\right) \quad (6)$$

حل y_1 و y_1' را در (۳) قرار میدهیم و y_2 را پیدا میکنیم

$$y_1' = -2e^{-2x}\left(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x\right) + e^{-2x}\Big($$

$$\left(-3C_1 \sin 3x + 3C_2 \cos 3x\right)$$

$$y_2 = \frac{1}{5}e^{-2x}\Big(\left(4C_1 - 3C_2\right)\cos 3x + \left(3C_1 + 4C_2\right)\sin 3x\Big)$$

ILIA GRAPHIC

Day. Month. Year. Subject.

مثال: دستگاه معادلات زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} y_1'' = y_2 + 1 & (a) \\ y_2'' = y_1 + x & (b) \end{cases}$$

حل: ابتدا از یکی از معادلات دستگاه مثلاً (a) دوبار مشتق می‌گیریم.

$$y_1''' = y_2' \Rightarrow y_1'''' = y_2'' \Rightarrow y_1^{(4)} = y_1 + x$$

a :) $y_2 = y_1'' - 1$ (۳)

طرف راست b

$$y_1^{(4)} - y_1 = x$$

$$t^4 - 1 = 0 \Rightarrow t = \pm 1 , \quad t = \pm i$$

$$p = 0 , q = 1$$

$$y_1 = (c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}) + e^{0x}(c_3 \cos x + c_4 \sin x) - x$$

(۳) دوبار مشتق گیری و جایگذاری

$$\boxed{y_2 = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} - c_3 \cos x - c_4 \sin x - 1}$$

Day. Month. Year. Subject.

تعریف: فرض کنید T یک تبدیل باشد و $f(t)$ و $g(t)$ توابعی که تبدیل T آنها موجود است. اگر برای هر دو مقدار دلخواه c_1 و c_2 داشته باشیم:

$$T\left[c_1 f(t) + c_2 g(t)\right] = c_1 T\left[f(t)\right] + c_2 T\left[g(t)\right]$$

آنگاه، تبدیل T را یک تبدیل خطی می‌نامند.

نکته: تبدیل‌های مشتق و انتگرال، تبدیل‌ها خطی می‌باشند.

تبدیلات انتگرالی: اگر $f(t)$ بر فاصله I تعریف شده باشد و $k(t,s)$ تابعی از متغیر t و پارامتر s باشد تبدیل T که بصورت زیر تعریف می‌شود را یک تبدیل انتگرالی می‌گویند.

$$T\left[f(t)\right] = \int_a^b k(t,s) f(t)\, dt = F(s) \quad *$$

تبدیل فوریه: هرگاه در رابطه $*$ قرار دهیم:

$$a = -\infty \,,\; b = -\infty \,,\; k(t,\omega) = e^{-i\omega t}$$

تبدیل حاصل را در صورت وجود تبدیل فوریه تابع $f(t)$ می‌نامند.

$$\mathcal{F}\left[f(t)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} f(t)\, dt = F(\omega)$$

١٢٩

Day. Month. Year. Subject.

تبدیل لاپلاس: هرگاه در رابطه * داریم:

$a = 0 , b = \infty , K(t,s) = e^{-st}$

تبدیل حاصل را در صورت وجود، تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ می‌نامند

$$L[f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = F(s)$$

توجه: تبدیل لاپلاس حوزه زمان را به حوزه فرکانس تبدیل می‌کند، معمولاً متغیر زمان را با t، متغیر فرکانس را با s نشان می‌دهند.

مثال: تبدیل لاپلاس تابع $f(t)=1$ را بیابید.

$$L[1] = \int_0^\infty e^{-st}(1)\, dt = -\frac{1}{s}\left[e^{-st}\right]_0^\infty = \frac{1}{s}$$

با شرط $s>0$ همگرا است.

مثال: تبدیل لاپلاس تابع $f(t)=e^{at}$ را بیابید.

$$L[e^{at}] = \int_0^\infty e^{-st} e^{at}\, dt = \int_0^\infty e^{(a-s)t}\, dt = \frac{1}{a-s}\left[e^{(a-s)t}\right]_0^\infty$$

$$L[e^{at}] = \frac{1}{s-a}$$

با فرض $s>a$ همگرا است.

Day. Month. Year. Subject.

مثال: تبدیل لاپلاس تابع $f(t)=t$ را بیابید.

$$L[t]=\int_0^\infty te^{-st}dt=\left[-\frac{1}{s}te^{-st}-\frac{1}{s^2}e^{-st}\right]_0^\infty$$

جزء به جزء

با فرض $s>0$ حد به برابر است

$$L[t]=\frac{1}{s^2}$$

از مثال قبل و اصل استقراء ریاضی ثابت می‌گردد

$$L[t^n]=\frac{n!}{s^{n+1}}$$

Day. Month. Year. Subject.

کاربردها :

معادلات دیفرانسیل خطی در زمینه‌های بسیاری مطرح می‌شوند به عنوان مثال، اگر جمعیت کشوری را در نظر بگیریم که در اثر تولد، مرگ، مهاجرت از کشور و مهاجرت به آن، در حال تغییر است. آهنگ هر یک از اینها ممکن است با زمان تغییر کند. اگر y جمعیت در زمان t، $k(t)$ آهنگ تولد منهای آهنگ مرگ، و $m(t)$ آهنگ مهاجرت به کشور منهای آهنگ مهاجرت از آن باشد، آنگاه آهنگ تغییر جمعیت عبارت است از

$$\frac{dy}{dt} = k(t)y + m(t)$$

این معادله نسبت به y خطی است

Day. Month. Year. Subject.

معادله دیفرانسیل نظیر معادله زیر را بدست آورید:

$(x-c)^2+y^2=r^2$ c کمیت ثابت

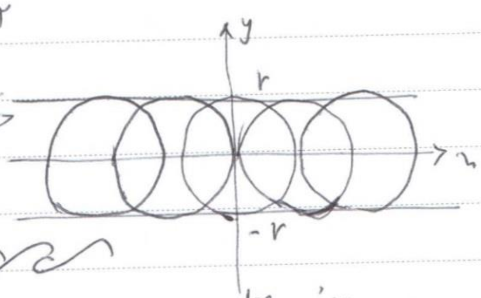
$2(x-c)+2yy'=0 \Rightarrow 2(x-c)+2yy'=0$

$2(x-c)+2y\dfrac{dy}{dx}=0 \Rightarrow (x-c)+y\dfrac{dy}{dx}=0$

$(x-c)=-y\dfrac{dy}{dx} \Rightarrow \left(-y\dfrac{dy}{dx}\right)^2+y^2=r^2$

$y^2\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2+y^2=r^2$

$y=\pm r$ خطوط مرزی



$y^2(y')^2+y^2=r^2$

معادله دیفرانسیل نظیر $y^2=4A(A+x)$ را تعیین نمائید

$2yy'=4A(A+x)' \Rightarrow 2yy'=4A \Rightarrow A=\dfrac{yy'}{2}$

$y^2=4\left(\dfrac{yy'}{2}\right)\left(\dfrac{yy'}{2}+x\right)$

$y^2=2yy'\left(\dfrac{yy'}{2}+x\right) \Rightarrow y^2=y^2(y')^2+2yy'x$

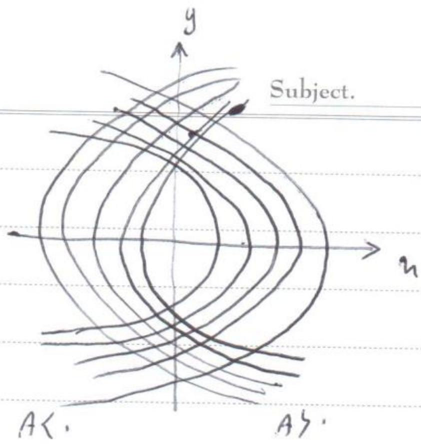
$y^2=y^2\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2+2y\left(\dfrac{dy}{dx}\right)x$

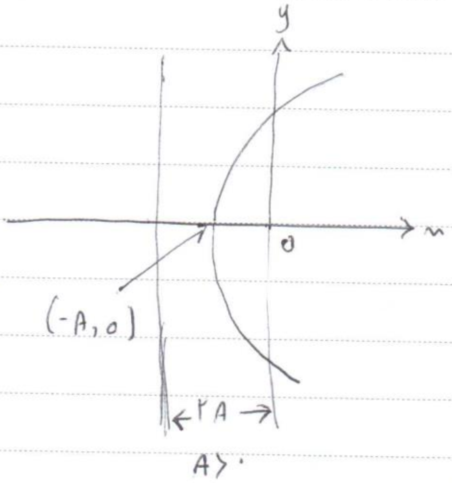
$y=y\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2+2\left(\dfrac{dy}{dx}\right)x \Rightarrow y\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2+2x\left(\dfrac{dy}{dx}\right)-y=0$

۱۳۳

Day. Month. Year. Subject.

$$yy'^2 + 2xy' - y = 0$$





جواب عمومی معادله $y''' = \sin x + \cos x$ را بیابید

با انتگرال گیری از این معادله متوالیاً خواهیم داشت

$$y'' = -\cos x + \sin x + C_1$$

$$y' = -\sin x - \cos x + C_1 x + C_2$$

$$y = \cos x - \sin x + \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

Day. Month. Year. Subject.

منابع :

۱) معادلات دیفرانسیل — مسعود نیکوکار

۲) ح ب دیفرانسیل و انتگرال — جورج توماس - راس فینی

۳) معادلات دیفرانسیل معمولی — ا. آی. کیزلف - ام ال. کراسنف

جی. آی. ماکارنکو

ترجمه : دکتر علی اکبر عالم زاده - دکتر حسن دوستی

۴- SCHAUM'S Differential EQUations