ریاضیات گسسته

گردآوری : مظفر غربی

بانام ویاد حضرت دوست که هرچه دارم از اوست ؛ و چون از اوست هر چه پسندد نکوست

باسلام وعرض ادب احتراماً معروض می دارد جهت استفاده دانشجویان کارشناسی کامپیوتر آموزشکده فنی وحرفه ای دختران سنندج جزوه ای تحت عنوان ریاضیات گسسته فراهم گردیده که خالی از عیب ونقصان نیست کاری بوده به وسع توان امید وارم که مثمر ثمر واقع گردد و رضای مخلوق را فراهم آورد که رضای خالق نیز بر آن افتد .

با احترام : مظفر غربی ۱۳۹۵

گل بی عیب خداست

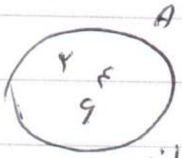
Year. Month. Date. ( ) Subject :

نظریه مجموعه ها و اعمال بین آنها

مجموعه: گردآیه ای از اشیای که دوبدو متمایز و مشخص

مثال: $A=\{۲, ۴, ۶\}$

و نمودار ون آن بصورت زیر می باشد



گاهی اوقات نیز مجموعه ها را با نمادهای ریاضی بیان می نمائیم

$$A=\{x \mid x\in Z,\ x^2-1=0\}$$

$$x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$$

مفهوم جزئیت یا زیرمجموعه

$$A\subset B \Rightarrow (\forall x\in A \Rightarrow x\in B)$$

تعریف: هرگاه $A\subset B$ و $B\subset A$ آنگاه $A=B$

تعریف: مجموعه تهی یا مجموعه ای که هیچ عضوی ندارد $\emptyset$ یا $\{\ \}$

$$\emptyset\subset A,\quad A\subset A$$

نکته: اگر مجموعه A دارای n عضو متمایز باشد آنگاه دارای 2^n زیرمجموعه

TALASH

۴

Year. Month. Date. ( ) Subject :

نکته: هرگاه به تعداد اعضای یک مجموعه n عضوی، k عضو اضافه شود تعداد زیر مجموعه های آن 2^k برابر می شود.

مثال: مجموعه ای دارای ۳ عضو است اگر یک عضو به آن اضافه نماییم تعداد زیر مجموعه های مجموعه جدید را تعیین نمائید:

در این مساله $k=1$، 2^1 برابر می شود

مجموعه A دارای 2^3 زیر مجموعه است بنابراین مجموعه جدید دارای $2(2^3)$ زیر مجموعه خواهد بود یعنی ۱۶

مجموعه توانی A را با $P(A)$ نمایش داده، مجموعه ای که شامل تمام زیر مجموعه های A است.

متمم یک مجموعه (از M مجموعه مرجع)

$$A \subset M$$

$$A' = \{x \mid x \in M,\ x \notin A\}$$

$$(A')' = A \quad , \quad \varnothing' = M \quad , \quad M' = \varnothing$$

اجتماع: $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A$ یا $x \in B$

TALASH

قضیه: $A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$

اشتراک: $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

$\wedge$ ، & ، و

$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$

قضیه: $A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$

تفاضل: $A - B = \{x \mid x \in M, x \in A, x \notin B\}$

$x \in (A - B) \Leftrightarrow x \in A \,\&\, x \notin B$

تذکر:

۱) $A \subset B \Rightarrow A - B = \emptyset$

۲) اگر A و B جدا از هم: $A - B = A$ ، $B - A = B$

۳) هرگاه $A - B = B - A$ آنگاه $A = B$

۴) $A - B = A \cap B'$

عمل تفاضل متقارن: $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$

$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$

$A \Delta B = B \Delta A$

6

Year. Month. Date. ( ) Subject :

عدد اصلی یک مجموعه متناهی

تعداد عضوهای هر مجموعه متناهی مانند A را عدد اصلی آن مجموعه نامند و با $n(A)$ نمایش میدهند

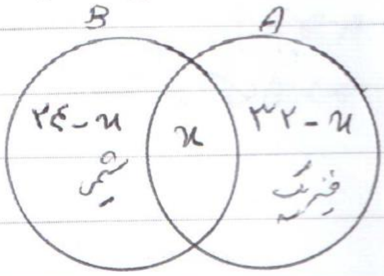
۱) دو مجموعه مساوی هم ارز هستند اما هر دو مجموعه هم ارز مساوی نیستند

۲) شرط لازم و کافی برای آنکه دو مجموعه A و B هم ارز باشند آن است که
$n(A) = n(B)$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

مثال: در یک کلاس ۴۰ نفری ۳۲ نفر در درس فیزیک و ۲۴ نفر در درس شیمی تجدید آورده اند و فقط ۴ نفر قبول شده اند چند نفر اولاً در دو درس تجدید شده اند، ثانیاً: چند نفر فقط فیزیک و چند نفر فقط شیمی تجدید آورده اند



تعداد تجدیدی‌ها $۴۰ - ۴ = ۳۶$

Year. Month. Date. ( ) Subject :

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$۳۶ = ۳۲ + ۲۴ - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = ۲۰$

یا

$(۳۲ - x) + x + (۲۴ - x) = ۳۶ \Rightarrow x = ۲۰$

مشترک در دو درس تجدید شده اند

$۳۲ - ۲۰ = ۱۲$ نفر فقط فیزیک

$۲۴ - ۲۰ = ۴$ ″ فقط شیمی

تذکر مهم: هرگاه a و b دو عدد صحیح و $a < b$ آنگاه:

$A = \{x \mid x \in Z, a < x < b\} \Rightarrow n(A) = b - a - 1$

مثال: چند عدد صحیح در نامساوی $n^۲ - ۲۵ < ۰$ صادق است

$n^۲ < ۲۵ \Rightarrow \sqrt{n^۲} < \sqrt{۲۵} \Rightarrow |n| < ۵$

$-۵ < n < ۵ \Rightarrow ۵ - (-۵) - ۱ = ۹$ تعداد اعداد

مثال: چند عدد طبیعی مکعب کامل بین ۹۹۹ و ۱۰۰۰۰۰۰ وجود دارد

$۹۹۹ < k^۳ < ۱۰۰۰۰۰۰ \Rightarrow ۹۹۹ < k^۳ < ۱۰۰^۳$

$۱۰^۳ \leq k^۳ < ۱۰۰^۳ \Rightarrow ۱۰ \leq k < ۱۰۰$

$۱۰۰ - ۱۰ = ۹۰$ تعداد اعداد

۸

Year. Month. Date. ( ) Subject :

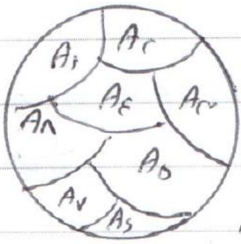
افراز مجموعه ها

مجموعه $B=\{A_1,A_2,\dots,A_n\}$ را یک افراز n عضوی A نامند هرگاه داشته باشیم

اولاً: هر عضو مجموعه B زیر مجموعه غیر تهی از A باشد.

ثانیاً: اشتراک هر دو عضو متمایز مجموعه B تهی باشد.

ثالثاً: اجتماع عضوهای مجموعه B مجموعه A را بوجود آورد.



$$A=A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4\cup\dots\cup A_8$$

$$A_1\cap A_2=A_1\cap A_3=A_3\cap A_4=\dots=A_7\cap A_8=\emptyset$$

مثال: آیا $\{\{1\},\{2,3\}\}$ یک افراز $A=\{1,2,3\}$ است؟

بلی: $A_1=\{1\}$ ، $A_2=\{2,3\}$

$A_1\neq\emptyset$ ، $A_2\neq\emptyset$

$A_1\cap A_2=\emptyset$

$A_1\cup A_2=A$

۹

Year. Month. Date. ( ) Subject :

حاصلضرب دکارتی مجموعه‌ها ، رابطه و تابع

۱) زوج مرتب : (a,b) (a مؤلفه اول و b مؤلفه دوم)

۲) شرط تساوی دو زوج مرتب $(a,b)=(a',b') \Rightarrow \begin{cases} a=a' \\ b=b' \end{cases}$

۳) ضرب مجموعه‌ها (ضرب دکارتی یا ضرب کارتزین)

$$A \times B = \{(x,y) \mid x \in A, y \in B\}$$

نکته‌ها :

۱) $A \times B \neq B \times A$

۲) $A \times \varnothing = \varnothing \times A = \varnothing$

۳) $A \times A = A^2 = \{(x,y) \mid x \in A, y \in A\}$

۴) $A^2 \times B^2 = \{((x,y),(x',y')) \mid (x,y) \in A^2, (x',y') \in B^2\}$

۵) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

۶) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

۷) $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$

TALASH

۱۰

Year. Month. Date. ( ) Subject :

رابطه:

تعریف: اگر A و B دو مجموعه دلخواه هر زیر مجموعه $A \times B$ را یک رابطه از A در B نامند روابط را با R نمایش میدهیم

$R \subset A \times B$

نکته ۱: هرگاه $R \subset A \times A$ گوئیم رابطه R روی A تعریف شده.

نکته ۲: هرگاه $n(A \times B) = k$ آنگاه تعداد روابط از A در B برابر با 2^k است

نکته ۳: هرگاه $n(A)=k_1$ و $n(B)=k_2$ آنگاه $n(A \times B)=k_1 k_2$ بنابراین $A \times B$ دارای $2^{k_1 k_2}$ زیرمجموعه است یعنی $2^{k_1 k_2}$ رابطه از A در B وجود دارد

مثال: هرگاه $n(A)=m$ چند رابطه می‌توان روی A تعریف کرد

$$n(A) = m \Rightarrow n(A \times A) = m \cdot m = m^2$$

پس 2^{m^2} رابطه وجود دارد

TALASH

تذکر: هرگاه R یک رابطه از A در B باشد، $(x,y)\in R$

می‌نویسیم xRy (x با y رابطه دارد)

$$(x,y)\in R \iff xRy$$

درضمن، همواره $\emptyset\subset A\times B$ لذا $\emptyset$ یک رابطه محسوب می‌شود

دامنه و برد یک رابطه

$$R\subset A\times B$$

دامنه $D_R\subset A$ برد $R_R\subset B$

وارون یک رابطه:

(وارون R) $R^{-1}=\{(x,y)\mid (y,x)\in R\}$

مثال: اگر $A=\{2,4,6\}$ و $B=\{3,5\}$ ،

آنگاه $R=\{(2,3),(4,5),(6,5)\}$

$$R^{-1}=\{(3,2),(5,4),(5,6)\}\subset B\times A$$

تذکر: در موارد زیاد رابطه به صورت یک ضابطه مشخص می‌گردد.

۱۲

Year. Month. Date. ( ) Subject :

تذکر: هرگاه f و g دو رابطه روی مجموعه A، $f \subset A\times A$ و $g \subset A\times A$ آنگاه:

الف: $(f \cup g)^{-1} = (f^{-1} \cup g^{-1})$

ب: $(f \cap g)^{-1} = (f^{-1} \cap g^{-1})$

ج: $(f - g)^{-1} = f^{-1} - g^{-1}$

خواص رابطه ها:

۱) خاصیت بازتابی (انعکاسی)

رابطه R در مجموعه A دارای خاصیت بازتابی است هرگاه هر عضو A با خودش در رابطه R باشد.

$$\forall x \in A: (x,x) \in R \text{ یا } xRx$$

مثال: رابطه $R=\{(1,1),(2,2),(1,2)\}$ در مجموعه $A=\{1,2\}$ خاصیت بازتابی دارد.

$1 \in A \Rightarrow (1,1) \in R$

$2 \in A \Rightarrow (2,2) \in R$

TALASH

Year. Month. Date. Subject :

مثال: رابطه $x+y$ مضرب ۳ است $\Leftrightarrow xRy$ در مجموعه $A=\{1,2,3,4\}$ تعریف شده است. آیا خاصیت بازتابی دارد؟

$$R=\{(1,2),(2,1),(2,4),(4,2),(3,3)\}$$

خیر: خاصیت بازتابی وجود ندارد، مثال نقض $1 \in A$ اما $(1,1) \notin R$

۲) خاصیت متقارن (تقارنی)

رابطه R در A دارای خاصیت تقارنی است هرگاه

$$\forall x,y \in A: (x,y)\in R \Leftrightarrow (y,x)\in R$$

یا

$$\forall x,y \in A: \quad xRy \Leftrightarrow yRx$$

نکته: رابطه R وقتی متقارن است که $R=R^{-1}$

مثال: اگر $A=\{1,2,3\}$، $R=\{(1,2),(2,1),(2,3),(3,2)\}$

R دارای خاصیت متقارن است

TALASH

Year. Month. Date. ( ) Subject :

۳) خاصیت پادتقارنی (ضد تقارنی)

رابطه تفصیلی R (رابطه‌ای که عضوهای آن مشخص شده‌اند.)

در مجموعه A خاصیت پادتقارنی را دارد اگر و فقط اگر گزاره

شرطی زیر در مورد آن یک مستلزم منطقی باشد.

$$\forall x,y \in A : [(x,y)\in R \wedge (y,x)\in R] \Rightarrow x=y$$

یا

$$\forall x,y \in A : [xRy \text{ و } yRx] \Rightarrow x=y$$

مثال: آیا $R=\{(1,2),(1,1),(2,3)\}$ روی مجموعه $A=\{1,2,3\}$

دارای خاصیت پادتقارنی را دارد؟

حل: هرگاه $x\neq y$ و $(x,y)\in R$ باشد و $(y,x)\notin R$ گوییم پادتقارنی است

$$(1,2)\in R \Rightarrow (2,1)\notin R$$
$$(2,3)\in R \Rightarrow (3,2)\notin R$$

در نتیجه R پادتقارنی است.

TALASH

مثال: آیا رابطه $R=\{(1,2),(1,1),(2,3),(3,2)\}$ روی مجموعه $A=\{1,2,3\}$ پادتقارنی است؟

خیر: چون $(2,3)\in R$ و $(3,2)\in R$ بنابراین پادتقارنی نیست.

مثال: آیا $R=\{(1,2)\}$ در مجموعه $A=\{1,2\}$ پادتقارنی است؟

R پادمتقارن است $\Leftarrow$ $(1,2)\in R$, $(2,1)\notin R$

یا

$$\underbrace{\underbrace{(1,2)\in R}_{\text{د}} \text{ و } \underbrace{(2,1)\in R}_{\text{ن}}}_{\text{ن}} \Rightarrow (1=2)$$

مقدم نادرست و با انتفای مقدم گزاره شرطی دارای ارزش درست است لذا خاصیت پادمتقارنی برقرار است.

نکته: هر رابطه شامل یک زوج مرتب حداقل خاصیت پادتقارنی را دارد.

رابطه نامتقارن: رابطه R را نامتقارن گویند هرگاه

$$R\cap R^{-1}=\varnothing$$

۴) خاصیت ترایایی - تعدی - ترافذیری

رابطه R در مجموعه A خاصیت ترایایی دارد در صورتیکه اگر

$$(x,y)\in R , (y,z)\in R \Rightarrow (x,z)\in R$$

یا

$$\forall x,y,z\in A ; (xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$$

نکته:

هرگاه $(x,y)\in R$ ولی $(y,z)\notin R$ آنگاه میگوئیم رابطه R

بنا بر قانون نفی مقدم دارای خاصیت ترایایی است.

مثال: آیا $R=\{(1,1),(2,2),(1,2)\}$ در $A=\{1,2\}$ ترایایی است

$$\underbrace{\underbrace{(1,2)\in R , (2,1)\in R}_{ن} \Rightarrow 1=2}_{د}$$

ترایایی

$(1,2)\in R , (2,1)\notin R$ (ترایایی برقرار است)

$$(2,2)\in R , (2,2)\in R \Rightarrow 2=2$$

۱۷

Year. Month. Date. ( ) Subject :

مثال: رابطه تساوی در مجموعه اعداد دارای خواص بازتابی - تقارنی - ترایایی - پادتقارنی است

a, b, c اعداد مورد نظر

الف: $a = a$ بازتابی

ب: هرگاه $a = b$ آنگاه $b = a$ (تقارنی)

ج: هرگاه $a = b$ و $b = a$ آنگاه $a = b$ (پادتقارنی)

د: هرگاه $a = b$ و $b = c$ آنگاه $a = c$ (ترایایی)

مثال: رابطه $\subset$ در خانواده مجموعه‌ها دارای چه خواصی است؟

الف: $A \subset A$ بازتابی

ب: اگر $A \subset B$ نمی‌توان نتیجه گرفت $B \subset A$ پس خاصیت تقارنی ندارد

ج: اگر $A \subset B$ و $B \subset C$ می‌توان نتیجه گرفت $A \subset C$ (خاصیت ترایایی دارد)

د: هرگاه $A \subset B$ و $B \subset A$ آنگاه $A = B$ (خاصیت پادتقارنی دارد)

TALASH

تعریف : خاصیت هم‌ارزی

رابطه R را هم‌ارزی گویند هرگاه، دارای خواص بازتابی ـ تقارنی و ترایایی باشد

خاصیت ترتیب

رابطه R را ترتیب گویند، هرگاه، دارای خواص بازتابی ، پادتقارنی و ترایایی باشد

نکته : هر رابطه شامل زوج‌های مرتب اگر دارای مؤلفه‌های اول و دوم برابر باشند و خاصیت بازتابی را در مجموعه تعریف شده را دارا باشد ،

رابطه قطری نامیده هم‌ارزی و ترتیب می‌باشد و از نظر نمودار اگر در مجموعه $\mathbb{R}$ تعریف شده باشد ، نیمساز ربع اول و سوم آن است .

مثال: رابطه $R=\{(1,1),(2,2)\}$ در مجموعه $A=\{1,2\}$ که شامل زوج‌های مرتب با مؤلفه اول و دوم برابر بوده و خاصیت بازتابی را در A دارا می‌باشد رابطه ای قطری است ، لذا هم رابطه هم‌ارزی است و هم ترتیب است

Year. Month. Date. ( ) Subject :

مثال: رابطه $R=\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1)\}$ در مجموعه $A=\{1,2,3\}$ چه خواصی دارد؟

الف: بازتابی

$$\begin{cases} 1\in A \Rightarrow (1,1)\in R \\ 2\in A \Rightarrow (2,2)\in R \\ 3\in A \Rightarrow (3,3)\in R \end{cases}$$

ب: تقارنی

$(x,y)\in R \Rightarrow (y,x)\in R$

$(1,2)\in R \Rightarrow (2,1)\in R$

ج: ترایایی یا تعدی

$(1,2),(2,1)\in R \Rightarrow (1,1)\in R$

$(2,1),(1,2)\in R \Rightarrow (2,2)\in R$

پس R یک رابطه هم‌ارزی است

ضمناً: چون $(1,2)\in R$ و $(2,1)\in R$ پادتقارنی نیست

مثال: آیا رابطه $R=\{(1,1),(2,2),(1,2)\}$ در مجموعه $A=\{1,2\}$ ترتیبی است

$1\in A \Rightarrow (1,1)\in R$

$2\in A \Rightarrow (2,2)\in R$

بازتابی

$(1,2)\in R,(2,1)\notin R$

پادتقارنی

$(1,1),(1,2)\in R \Rightarrow (1,2)\in R$

$(1,2)\in R,(2,2)\in R \Rightarrow (1,2)\in R$

ترایا یا تعدی

رابطه R یک رابطه ترتیبی

TALASH

دسته هم‌ارزی (کلاس هم‌ارزی)

تعریف: هرگاه رابطه R روی مجموعه A یک رابطه هم‌ارزی باشد در اینصورت برای هر $a\in A$ دسته هم‌ارزی یا کلاس هم‌ارزی به صورت زیر تعریف می‌شود

$$[a]=\{x\in A \mid xRa\}$$

مثال: اگر رابطه R را روی Z بصورت زیر تعریف کنیم کلاس‌های هم‌ارزی رابطه R را معین کنید.

$$\forall x,y\in Z,\ xRy \Leftrightarrow x-y=3k\ (k\in Z)$$

$$[0]=\{x\in Z \mid xR0\}=\{x\in Z \mid x-0=3k\}$$

$$x=3k,\ k\in Z$$

$$[0]=\{\dots,-6,-3,0,3,6,9,\dots\}$$

$[1]=\{x\in Z \mid xR1\}=\{x-1=3k$ یا $x=3k+1\}$

$$[1]=\{\dots,-5,-2,1,4,7,\dots\}$$

$[2]=\{x\in Z \mid xR2\}=\{x-2=3k$ یا $x=3k+2\}$

$$[2]=\{\dots,-7,-4,-1,2,5,8,11,\dots\}$$

$$[3]=[0]$$

پس رابطه فوق دارای ۳ کلاس هم‌ارزی $[0]$ ، $[1]$ و $[2]$ می‌باشد

Year. Month. Date. ( ) Subject :

مثال :
رابطه زیر در $\mathbb{R}^2$ تعریف شده است

$$\forall (a,b),(c,d)\in R^2 \ ,\ (a,b)R(c,d) \Leftrightarrow a^2+b^2=c^2+d^2$$

الف : نشان دهید که R یک رابطه هم ارزی است .

ب : مجموعه $[(1,2)]$ را مشخص کنید .

ج : دسته های هم ارزی در $\mathbb{R}^2$ چه نمودی دارند .

الف : ۱) $\forall (a,b)\in \mathbb{R}^2 \Rightarrow (a,b)R(a,b) \Leftrightarrow a^2+b^2=a^2+b^2$

بازتابی

۲) $\forall (a,b),(c,d)\in \mathbb{R}^2 \Rightarrow (a,b)R(c,d)=(c,d)R(a,b)$

تقارنی $a^2+b^2=c^2+d^2 \Rightarrow c^2+d^2=a^2+b^2 \Rightarrow (c,d)R(a,b)$

۳) $\forall \underbrace{(a,b),\overbrace{(c,d)}^{II}}_{I},(e,f)\in \mathbb{R}^2 \Rightarrow (a,b)R(c,d)\wedge (c,d)R(e,f)$

$$\left.\begin{array}{ll} I) & a^2+b^2=c^2+d^2 \\ II) & c^2+d^2=e^2+f^2 \end{array}\right\} \Rightarrow a^2+b^2=e^2+f^2 \Rightarrow (a,b)R(e,f)$$

(ترا گذاری)

(لذا یک رابطه هم ارزی وجود دارد)

TALASH

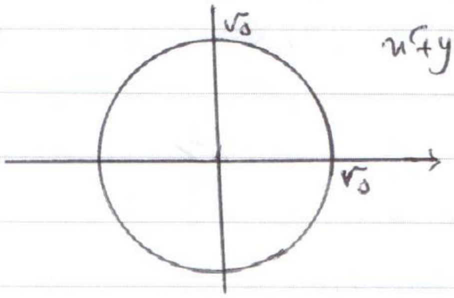
Year. Month. Date. ( ) Subject :

ب :

$[(1,2)] = \{(x,y) \mid (x,y)\, R\, (1,2)\}$

$= \{(x,y) \mid x^2+y^2 = 1^2+2^2 = 5\}$

$x^2+y^2=(\sqrt{5})^2$ دایره‌ای به شعاع $\sqrt{5}$



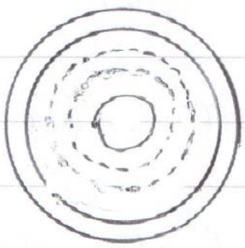
ج :

$[(a,b)] = \{(x,y) \mid (x,y)\, R\, (a,b)\}$

$x^2+y^2 = \underbrace{a^2+b^2}_{\text{عدد ثابت}} = c^2 \Rightarrow x^2+y^2=c^2$

دایره‌ای به شعاع c

لذا نمودار دسته‌های هم ارزی فوق دوایری به مرکز $(0,0)$ و شعاع‌های متفاوت



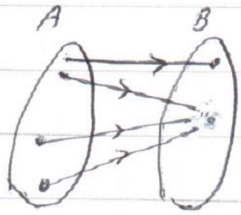
« دایره‌های متحدالمرکز »

تابع

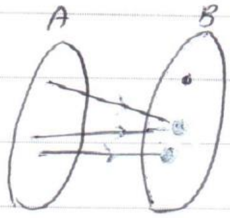
رابطه f از A در B را تابع نامیم هرگاه:

$$\forall (x,y),(x',y') \in f : x=x' \Rightarrow y=y'$$

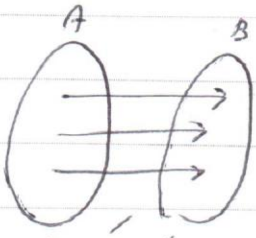
هیچ دو زوج مرتب متمایز دارای مؤلفه های اول یکسان نباشند و اگر دو زوج مرتب با مؤلفه های یکسان در رابطه وجود داشته باشد حتماً باید مؤلفه های دوم نیز برابر باشند تا تابع نامیده شوند. (مطالب ریاضی عمومی)



تابع (پوشا)



تابع (غیرپوشا)



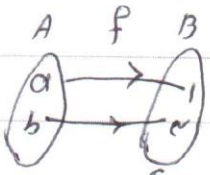
تابع (یک به یک) (پوشا)

تعریف: تابع یک به یک

$$\begin{cases} \forall x,x' \in A : f(x)=f(x') \Rightarrow x=x' \\ x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x') \end{cases}$$

تابع پوشا: $\forall y \in B \ \exists x \in A , f(x)=y$

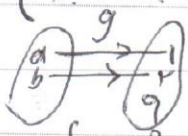
به عبارتی برد تابع برابر هم دامنه باشد



پوشا

$D_f=\{a,b\}$

$R_f = B$ هم دامنه



$R_f=\{1,2\}$ ، هم دامنه $=\{1,2,9\}$

پوشا نیست (برای 9، x ی وجود ندارد)

۲۴

Year. Month. Date. ( ) Subject :

قضیه: شرط لازم و کافی برای اینکه f از A به B وارون پذیر باشد آن است که تابع یک به یک باشد. به عبارت دیگر هر تابع اکیداً یکنوا یک به یک است و لذا وارون پذیر (f^{-1} وارون f)

$$D_f = R_{f^{-1}} \quad , \quad R_f = D_{f^{-1}}$$

مثال:

1) $y = 3x - 1$

2) $y = x^3 - 1$

3) $y = \dfrac{x-1}{x-2}$

4) $y = \sin x \quad , \quad [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

5) $y = \cos x \quad , \quad [0, \pi]$

6) $y = a^x \quad , \quad a > 0 , a \neq 1$

7) $y = \tan x \quad , \quad (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

TALASH

۱۵

Year. Month. Date. ( ) Subject :

(((گروه)))

اواریست گالوا ریاضیدان فرانسوی اولین کسی است که نظریه گروهها را در ریاضیات به کار برد ولی در قرن ۱۹ سالگی مطالعه منظم گروهها را شروع کرد

تعریف : فرض کنیم A یک مجموعه ناتهی باشد ، یک عمل دوتایی و یا یک عمل روی مجموعه A عبارت از تابعی است روی $A \times A$ در A

به عبارت دیگر یک عمل روی مجموعه A عبارت از تابعی است که به هر زوج مرتب از عناصر A ، یک عنصر منحصر بفرد از A را نسبت دهد .

یک عمل روی مجموعه A را با نمادهای $*$ ، $\circ$ ، $\square$ و ... نمایش میدهند

اگر $*$ یک عمل روی مجموعه A باشد ، عنصری از A که به زوج مرتب $(a,b) \in A \times A$ نسبت داده می‌شود با $a * b$ نمایش داده می‌شود

۲۶

Year. Month. Date. ( ) Subject :

نکته : A را نسبت به عمل ⋆ بسته گوئیم هرگاه

$$\forall a,b \in A \Rightarrow a \star b \in A$$

تعریف : گوئیم عمل ⋆ روی مجموعه A دارای خاصیت جابجایی است

هرگاه

$$\forall a,b \in A \Rightarrow a \star b = b \star a$$

مثال : عمل + روی مجموعه اعداد حقیقی دارای خاصیت جابجایی است

$$\forall a,b \in \mathbb{R} : a+b=b+a$$

مثال : عمل □ را روی مجموعه اعداد صحیح بصورت زیر تعریف می‌کنیم

$$m \square n = m^2 + n$$

آیا □ روی Z دارای خاصیت جابجایی می‌باشد ؟

$$۴ \square ۳ = ۴^۲ + ۳ = ۱۹$$
$$۳ \square ۴ = ۳^۲ + ۴ = ۱۳$$
$$\Rightarrow ۱۹ \neq ۱۳$$

(خاصیت جابجایی برقرار نیست)

TALASH

Year. Month. Date. ( ) Subject :

تعریف : گوئیم عمل $*$ روی مجموعه A دارای خاصیت شرکت پذیری است هرگاه

$$\forall a,b,c \in A : \quad (a*b)*c = a*(b*c)$$

مثال : عمل $+$ روی مجموعه اعداد حقیقی دارای خاصیت شرکت پذیری است

$$(a+b)+c = a+(b+c)$$

مثال : عمل o روی مجموعه اعداد طبیعی را بصورت زیر است

$$\forall m,n \in N \Rightarrow m \, o \, n = m$$

آیا عمل o دارای خاصیت شرکت پذیری است ؟

$m, n, p \in N$

$$\underbrace{(m \, o \, n)}_{\downarrow} o \, p \equiv m \, o \underbrace{(n \, o \, p)}_{\downarrow}$$

$$\underbrace{m \, o \, p}_{\downarrow} \qquad \underbrace{m \, o \, n}_{\downarrow}$$

$$m \equiv m$$

خاصیت شرکت پذیری برقرار است

TALASH

۲۸

Year. Month. Date. ( ) Subject :

گروه : فرض کنیم G یک مجموعه ناتهی و $*$ یک عمل روی G ،

G را همراه با عمل $*$ یک گروه گوئیم هرگاه خواص زیر برقرار باشد

الف : عمل $*$ روی G دارای خاصیت شرکت پذیری باشد

ب : در G عضوی مانند e وجود داشته باشد بطوریکه برای هر

$g \in G$ ، $g * e = e * g = g$

(e عضو خنثی عمل $*$ در G)

ج : برای هر $a \in G$ یک عضر $a' \in G$ وجود داشته باشد

بطوریکه $a' * a = a * a' = e$

(((a' را عضو وارون a نسبت به عمل $*$ نامیم)))

مجموعه G همراه با عمل $*$ را گاهی با نماد $(G, *)$ نمایش میدهند

نکته : عضو خنثی (e) و عضو وارون (a') در هر گروه منحصر بفرد است .

TALASH

۲۹

Year. Month. Date. ( ) Subject :

مثال: مجموعه اعداد صحیح همراه با عمل جمع یک گروه است

الف: خاصیت شرکت پذیری برقرار است

$a+(b+c)=(a+b)+c$

ب: عضو خنثی وجود دارد

$a+0=0+a=a$

ج: عضو قرینه وجود دارد

$\forall a \in Z \ \exists -a \in Z \ni a+(-a)=(-a)+a=0$

مثال: ثابت کنید مجموعه اعداد گویای مثبت با عمل ضرب تشکیل یک گروه می دهد

$Q^+=\{\frac{a}{b} | a,b \in N\}$

$a,b,c \in Q^+$

I) $(a \times b)\times c = a \times (b \times c)$

مثال: $(\frac{3}{4}\times\frac{1}{2})(\frac{7}{6})=(\frac{3}{4})(\frac{1}{2}\times\frac{7}{6})$

II) ۱ عضو خنثی عمل ضرب $1 \in Q^+ \Rightarrow 1\times\frac{p}{q}=\frac{p}{q}\times 1=\frac{p}{q}$

$p,q \in N$

III) $\frac{p}{q}\times\frac{q}{p}=\frac{q}{p}\times\frac{p}{q}=1 \quad , \frac{p}{q},\frac{q}{p} \in Q^+$

مثال: مجموعه ماتریس‌های ۲×۲ همراه با عمل جمع ماتریس‌ها یک گروه است؟

I) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ (ماتریس ۲×۲)

$$\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{bmatrix}\right)$$

(شرکت پذیری برقرار است)

II) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

عضو خنثی وجود دارد

III) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ عضو قرینه وجود دارد

شرایط گروه برقرار است، لذا ماتریس‌های فوق گروه را تشکیل می‌دهند

مثال: ثابت کنید مجموعه اعداد طبیعی نسبت به عمل جمع تشکیل یک گروه نمی‌دهد

مثال: ثابت کنید مجموعه اعداد صحیح همراه با عمل ($-$) یک گروه نیست

۳۱

Year. Month. Date. ( ) Subject :

تعریف: اگر $(G,*)$ یک گروه و $*$ دارای خاصیت جابجایی باشد $(G,*)$ یک گروه جابجایی (آبلی) است.

مثال: $(R,+)$ یک گروه جابجایی است.

نکته: در هر گروه $(a')' = a$

قضیه:

زیرگروه: برای اینکه $G' \subset G$ زیرگروه G باشد باید

$$\forall a,b \in G' \Rightarrow a' * b \in G'$$

مثال: $(Q,+)$ و $(Z,+)$ زیرگروههای $(R,+)$ هستند

TALASH

مثال: مجموعه $Z_4=\{0,1,2,3\}$ مجموعه باقیمانده‌های اعداد صحیح بر عدد ۴ می‌باشد.

در این مجموعه حاصل جمع هر دو عضو را باقیمانده مجموع آن دو عدد بر عدد ۴ در نظر می‌گیریم.

$\oplus$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

با توجه به جدول $(Z_4, \oplus)$ یک گروه آبلی است زیرا

الف: شرکت‌پذیری برقرار است

ب: عضو خنثی وجود دارد

ج: عضو قرینه وجود دارد مثلاً ۱ عضو قرینه ۳ است و ۲ قرینه ۲ می‌باشد

د: خاصیت جابجایی برقرار است

$2\oplus3=3\oplus2=1$

«لذا گروه آبلی است»

نکته: $G'=\{0\}$ ، $G_1=\{0,2\}$ زیرگروه‌های Z_4 هستند

$\oplus$	0
0	0

۰ عضو بی‌اثر و متقابل

$\oplus$	0	2
0	0	2
2	2	0

۰ عضو بی‌اثر

۲ عضو متقابل

۳۳

Year. Month. Date. ( ) Subject :

هم ریختی (هومومورفیسم)

فرض کنید $(G, *)$ و $(G', *')$ گروه باشند. تابع $\varphi: G \to G'$

را هم ریختی (هومومورفیسم) از G به توی G' گوییم هرگاه،

$$\forall a,b \in G \Rightarrow \varphi(a * b) = \varphi(a) *' \varphi(b)$$

عبارت بالا اغلب به صورت ساده زیر می‌نویسند $\underbrace{\varphi(ab)}_{\in G} = \underbrace{\varphi(a)\varphi(b)}_{\in G'}$

به عبارتی ضرب سمت چپ در G است ولی حاصلضرب سمت راست در G' است

مثال: فرض کنید $(R^+, \times)$ گروه تمام اعداد حقیقی مثبت تحت ضرب

و $(R, +)$ گروه تمام اعداد حقیقی تحت جمع باشد. تابع لگاریتم را

با هر پایه ثابت مانند b از R^+ به توی R (یعنی تابع پوشا) R

در نظر می‌گیریم $\varphi: (R^+, \times) \to (R, +)$

$$\log_b xy = \log_b x + \log_b y$$

پس لگاریتم یک هم ریختی است از آنجایی که یک به یک و پوشا نیز هست پس

یک به یک ریختی است.

۳۴

Year. Month. Date. ( ) Subject :

از تعریف هومومورفیسم (هم ریختی) نتیجه می‌گیریم توابعی که

عملگرها را حفظ کنند بسیار مهم می‌باشند به این توابع، توابع هومومورفیسم

(هومومورفیسم ـ هم ریخت) گفته می‌شود

مثال: اگر اعداد طبیعی با عمل جمع را در نظر بگیریم تابعی که خاصیت

جمع را باید حفظ کند باید دارای خاصیت زیر باشد

$$f(a+b)=f(a)+f(b)$$

مثال: تابع $f(x)=2x$ تابعی هومومورفیسم است زیرا

$$f(a+b)=2(a+b)=2a+2b=f(a)+f(b)$$

مثال: $f(x)=e^x$

$$f(a+b)=e^{a+b}=e^a\times e^b=f(a)f(b)$$

TALASH

۳۸

Year. Month. Date. ( ) Subject :

مثال: G گروه اعداد حقیقی مثبت نسبت به عمل جمع و G' گروه اعداد حقیقی مثبت نسبت به عمل ضرب ($*$ عمل G و $*'$ عمل G')

نشان دهید $f: G \to G'$ که بوسیله تابع $f(a)=2^a$ تعریف می‌شود یک همریختی است و آیا یکریختی نیز می‌باشد.

نگاشت $f: G \to G'$ همریختی است زیرا

$$f(a+b) = f(a)f(b)$$

$$f(a+b) = 2^{a+b} = 2^a \times 2^b = f(a)\,f(b)$$

نسبت به عمل $*'$ خاصیت ضرب توان   نسبت به عمل $*$

از طرفی $f(a)=2^a$ $(a \in \mathbb{R}^+)$ تابعی اکیداً صعودی است، لذا یک به یک است و با توجه به برابری برد آن با هم دامنه خود تابع پوشاست

($\mathbb{R}^+ = R_f =$ هم دامنه) لذا f یکریختی است.

منطق ریاضی

گزاره: جمله‌ای است خبری به شکلی که دارای یکی و فقط یکی از دو ارزش درست یا نادرست باشد، حتی اگر ارزش آن فعلاً برای ما معلوم نباشد.

مثال: «در کهکشان‌های دیگر انسان‌هایی زندگی می‌کنند» اگرچه فعلاً درستی یا نادرستی آن برای ما معلوم نیست اما یک گزاره است.

در منطق گزاره‌ها را با p، q، r، s، ... نمایش می‌دهند.

همچنین نقیض گزاره p را با $\sim p$ نمایش می‌دهند.

دو گزاره هم‌ارزش یا هم‌ارز: دو گزاره مانند p و q را که همواره دارای یک ارزش باشند دو گزاره هم‌ارزش یا هم‌ارز نامند. $p \equiv q$

گزاره‌نما: هر عبارت خبری که دارای یک یا چند متغیر باشد بطوری که نتوان ارزش آن را تعیین کرد یک گزاره‌نما نامیده می‌شود.

مثلاً: n عددی اول است.

مثال: n مثبت و y زوج است.

۳۷

Year. Month. Date. ( ) Subject :

دامنه متغیر یک گزاره‌نما: مجموعه مقادیری که می‌توانند و مجازند به جای متغیر یا متغیرهای یک گزاره‌نما واقع شوند و گزاره‌نما را به یک گزاره تبدیل کنند (خواه درست یا نادرست) دامنه متغیر گزاره‌نما نامند.

مجموعه جواب گزاره‌نما: قسمتی از دامنه متغیر که گزاره‌نما را به یک گزاره درست تبدیل می‌کند مجموعه جواب گزاره‌نما نامند.

مثال: مجموعه جواب و دامنه متغیر را برای گزاره‌نماهای زیر تعیین نمائید

الف: x عددی طبیعی بین ۲ و ۳

ب: x عددی بین ۲ و ۳

الف: مجموعه جواب (برد) $R = \emptyset$, $D = N$ دامنه

ب: $D = \mathbb{R}$

$R = \{x \mid x \in \mathbb{R},\ ۲ < x < ۳\} = (۲, ۳)$

TALASH

ترکیب گزاره‌ها

گزاره‌های ساده را به چهار صورت می‌توان با یکدیگر ترکیب کرد و از آنها گزاره‌های مرکب تشکیل داد که به شرح زیر می‌باشند.

۱) ترکیب فصلی (یا) از نماد $\vee$ استفاده می‌شود و می‌نویسیم $p \vee q$

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

۲) ترکیب عطفی (و) از نماد $\wedge$ استفاده می‌شود $p \wedge q$

$\wedge$ ، و ، &

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

ارزش $p \wedge \sim q$ را بدست آورید

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$
T	T	F	F
T	F	T	T
F	T	F	F
F	F	T	F

۳۹

Year. Month. Date. ( ) Subject :

۳) ترکیب شرطی (اگر ... آنگاه)

اگر p , q دو گزاره باشند گزاره (اگر p آنگاه q) را ترکیب شرطی q و p می‌نامیم

p	q	$p \Rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

$p \Rightarrow q$

مقدم ، تالی ، دمی نوسم

تعریف : هر گزاره شرطی همواره درست را یک استلزام منطقی می‌نامند

(اگر بتوانیم از درستی مقدم به درستی تالی برسیم آن را قضیه شرطی می‌نامند)

کدام یک از گزاره‌ها زیر استلزام منطقی است

1) $p \Rightarrow p \vee q$ ✓

2) $p \wedge q \Rightarrow p \vee q$ ✓

3) $q \Rightarrow p \vee q$ ✓

4) $p \vee q \Rightarrow p \wedge q$ ✗

تعریف : عکس نقیض ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ بصورت زیر است

$\sim q \Rightarrow \sim p$

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim q$	$\sim p$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
T	T	T	F	F	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T

TALASH

$p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$

قضیه اساسی منطق گزاره‌ها

$$p \Rightarrow q \equiv (\sim p \vee q)$$

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim p$	$\sim p \vee q$
T	T	T	F	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

$$p \Rightarrow q \equiv (\sim p \vee q)$$

نقیض یک ترکیب شرطی

$$\sim(p \Rightarrow q) \equiv \sim(\sim p \vee q) \equiv p \wedge \sim q$$

می‌توان از راه جدول نیز اثبات نمود

۶) ترکیب دو شرطی : ترکیب عطفی $p \Rightarrow q$ را با $q \Rightarrow p$ گزاره دو شرطی نامند

$$p \Leftrightarrow q$$

$$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$p \Leftrightarrow q$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	
F	T	T	F	
F	F	T	T	T

گزاره دو شرطی وقتی همواره درست است که مقدار دو تا هر دو درست یا هر دو نادرست باشند

Year. Month. Date. ( ) Subject :

رابطه‌های بازگشتی

در بسیاری از موارد بین هر جمله دنباله و جمله‌های قبل از آن رابطه‌ای برقرار است که به آن رابطه برگشتی گفته می‌شود که در چنین مواردی با معلوم بودن بعضی از جمله‌ها به کمک رابطه برگشتی می‌توان جمله‌های دیگر دنباله را مشخص کرد.

مثال: دنباله $1, 6, 11, 16, 21, \ldots$ دارای رابطه برگشتی است که عبارت است از

$u_2 = u_1 + 5$

$u_3 = u_2 + 5$

$u_n = u_{n-1} + 5$

نکته: ساده‌ترین دنباله‌های با رابطه برگشتی دنباله عددهای طبیعی است که رابطه برگشتی آن عبارت است از $u_n = u_{n-1} + 1$

TALASH

۴۲

Year. Month. Date. ( ) Subject :

بخشی از دنباله‌ها

۱) دنباله محدود: دنباله‌ای که با قطعه‌ای از اعداد طبیعی در تناظر یک به یک باشد

مثال: عددهای اول یک رقمی ۲، ۳، ۵، ۷

۲) دنباله از یک سو نامحدود (دنباله یک سویه - یک طرفه) دنباله‌ای است که با همه دنباله‌ها طبیعی در تناظر یک به یک باشد.

مثال: دنباله عددهای زوج طبیعی

۲، ۴، ۶، ۸، ...

۳) دنباله از دو سو نامحدود (دو طرفه)

دنباله‌ای که با دنباله اعداد صحیح نسبی در یک تناظر یک به یک باشد، و یا تابعی که دامنه تعریف آن عددهای صحیح نسبی باشد

مثال: دنباله متناوب $\{\sin \frac{n\pi}{2}\}$ که در آن $n \in N$

$\{\dots, 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, \dots\}$

۴) دنباله مثبت:

همه جملات مثبت

$f(n) = 2n$

$n \in N$

۲، ۴، ۶، ۸، ...

TALASH

Year. Month. Date. ( ) Subject :

۵) دنباله منفی : همه جملات منفی

$f(n) = -n^2$
$n \in N$

$-1, -4, -9, -16, \dots$

۶) دنباله متناوب
الف : دنباله ای که جملاتش متناوباً مثبت و منفی است
ب : متناوب دوره ای که جملاتش در فاصله های معین تکرار می شود

الف : $\begin{cases} a(n) = (-1)^n n \\ n \in N \end{cases}$ $\quad -1, 2, -3, 4, -5, 6, \dots$

ب : $1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \dots$

۷) دنباله اکیداً صعودی : دنباله $\{a_n\}$ را اکیداً صعودی نامند هرگاه

$\forall n \geq 1 \Rightarrow a_{n+1} > a_n$
$1, 4, 9, 16, \dots$

۸) دنباله صعودی $\quad a_{n+1} \geq a_n$

۹) دنباله اکیداً نزولی ، $\quad a_{n+1} < a_n$
$-2, -4, -6, -8, \dots$

۱۰) دنباله نزولی

$a_{n+1} \leq a_n$

TALASH

نکته ۱ : دنباله‌ای اکیداً یکنواست که اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد

و دنباله‌ای یکنواست که صعودی یا نزولی باشد.

نکته ۲ : اگر u_n تابع ثابت باشد $u_n=c$ هم یکنوای صعودی و هم یکنوای نزولی است.

مثال : $u_n = 7$ $\qquad u_{n+1} \geq u_n$ و $u_{n+1} \leq u_n$

$7, 7, 7, 7, 7, 7, \ldots$

مثال : $u_n = 0$ ، $0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots$

۱۱) دنباله متقارن : دنباله‌ای که در آن هر دو جمله که از طرفین به یک فاصله‌اند برابر باشند ، مانند دنباله‌های محدود ضرایب بسط $(a+b)^n$

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}
$$

«««بعضی از دنباله های مشهور»»»

۱) دنباله فیبوناچی (فیبوناتچی)

۱، ۱، ۲، ۳، ۵، ۸، ...

$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ ، $n \geq 3$

۲) دنباله لوکا

$u_1 = 1$

$u_2 = 3$

$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$

۱، ۳، ۴، ۷، ۱۱، ۱۸، ...

۳) دنباله هارمونیک $\left\{\frac{1}{n}\right\}$

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \ldots$

۴) دنباله فاکتوریل $\left\{\frac{1}{n!}\right\}$

$\frac{1}{1!}, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \frac{1}{4!}, \ldots$

۵) تصاعدها : تصاعد عددی و تصاعد هندسی

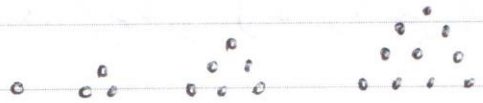
$\div\ a, a+d, a+2d, \ldots, a+(n-1)d$ عددی

$∺\ a, aq, aq^2, aq^3, \ldots, aq^{n-1}$ هندسی

۶) دنباله های اعداد مثلثی ، مربعی ، مخمسی ، مسدسی

مثلثی

۱, ۳, ۶, ۱۰, ۱۵, ۲۱, ...



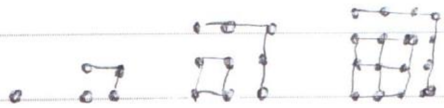
$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

n طول ضلع

$T_2 = \frac{2(2+1)}{2} = 3$, $T_3 = \frac{3(3+1)}{2} = 6, \dots$

مربعی

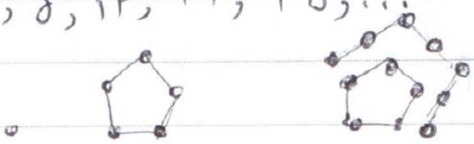
۱, ۴, ۹, ۱۶, ۲۵, ۳۶, ...



$$S_n = n^2$$

مخمسی

۱, ۵, ۱۲, ۲۲, ۳۵, ...



$P_n = \frac{1}{2}(n)(3n-1)$

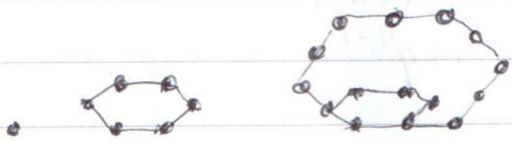
$P_1 = \frac{1}{2}(1)(3(1)-1) = 1$

$P_2 = \frac{1}{2}(2)(3(2)-1) = 5$

$P_3 = \frac{1}{2}(3)(3(3)-1) = 12$

مسدسی

۱, ۶, ۱۵, ۲۸, ۴۵, ۶۶, ۹۱, ...



۴۷

Year. Month. Date. ( ) Subject :

تعریف رابطه بازگشتی همگن

اگر a_i ها عددهای حقیقی باشند به رابطه بازگشتی زیر رابطه بازگشتی همگن از درجه K می‌گویند $a_k \neq 0$

$$1) \quad a_n = a_1 a_{n-1} + a_2 a_{n-2} + a_3 a_{n-3} + \dots + a_k a_{n-k}$$

و جواب‌های رابطه ۱ بصورت $a_n = c_1 x_1^n + c_2 x_2^n + \dots + c_k x^k$ می‌باشند

که x_1 ، x_2 ، x_3 ، ... ریشه‌ها معادله مشخصه (ریشه‌ها) می‌باشند

$a_i \neq 0$ ، $i = 1, 2, 3, \dots, k$

$$a_n - a_1 a_{n-1} - a_2 a_{n-2} - \dots - a_k a_{n-k} = 0$$

$$x^k - a_1 x^{k-1} - \dots - a_k = 0 \ , \quad a_k = 0$$

(معادله مشخصه ۱)

TALASH

توابع مولد:

تعریف: تابع مولد برای دنباله $a_1, a_2, \dots, a_k$ از اعداد حقیقی بصورت سری نامتناهی زیر است

$$G(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_k x^k + \dots$$

$$G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

توجه: به تابع مولد برای دنباله $\{a_n\}$ گاهی اوقات تابع مولد اولیه دنباله $\{a_n\}$ گفته می‌شود

Year. Month. Date. ( ) Subject :

مثال : $f(x)=\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$ تابع مولد دنباله $\{\underbrace{1,1,1,\dots,1}_{n+1},\dots\}$

$x\neq 1$

می‌باشد

$$f(x)=\frac{(1-x)(1+x+x^2+\dots+x^n)}{(1-x)}=\overbrace{1+x+x^2+x^3+\dots+x^n}^{n+1 \text{ جمله}}$$

ضرایب همگی ۱ می‌باشند

$\{\underbrace{1,1,1,\dots,1}_{n+1},\dots\}$

مثال : $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ تابع مولد دنباله $\{1,1,1,\dots,1\}$ می‌باشد

$x\neq 1$

$$f(x)=\sum_{i=0}^{\infty}x^i$$

$$\begin{array}{r|l} 1 & 1-x \\ \hline -1+x & 1+x+x^2 \\ x & \\ -x+x^2 & \\ x^2 & \\ -x^2+x^3 & \\ \dots & \end{array}$$

$$f(x)=\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\dots$$

$$f(x)=\frac{1}{1-x}\Rightarrow f'(x)=\frac{0(1-x)-(-1)(1)}{(1-x)^2}=\frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\hookrightarrow f(x)=1+x+x^2+x^3+\dots\Rightarrow f'(x)=0+1+2x+3x^2+4x^3+\dots$$

لذا $f(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}$ تابع مولد دنباله زیر می‌باشد

$\{1,2,3,4,\dots\}$

$$1 \,\Big|\, (1-x)^2 \Rightarrow 1 \,\Big|\, \frac{1-2x+x^2}{1+2x+3x^2+\dots}$$

TALASH

۵۰

Year. Month. Date. ( ) Subject :

از مثال‌های قبل می‌توان نتیجه گرفت

$$f(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{0(1-x)^2-2(-1)(1-x)(1)}{(1-x)^4}=\frac{2}{(1-x)^3} \quad *$$

$$f(x)=\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+6x^5+\cdots$$

$$\downarrow$$

$$f'(x)=0+2+6x+12x^2+20x^3+30x^4+\cdots \quad **$$

از $*$ و $**$ نتیجه می‌گیریم که $f(x)=\frac{2}{(1-x)^3}$ تابع مولد دنباله $\{2,6,12,20,30,\dots\}$ می‌باشد.

۵۱

Year. Month. Date. ( ) Subject :

مثال: رابطه بازگشتی $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ را با شرط $a_0 = 1$

و $a_1 = 6$ را بدست آورید.

$$x^2 = 6x - 9$$

$$x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow (x-3)^2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 3$$

ریشه مضاعف

((($a_n = c_1 x_1^n + c_2\, n\, x_2^n$)))

بدلیل ریشه مضاعف

$$a_n = c_1(3)^n + c_2(3)^n(n)$$

$$\begin{cases} a_0 = c_1(3)^0 + c_2(3)^0(0) = 1 \Rightarrow c_1 = 1 \\ a_1 = c_1(3)^1 + c_2(3)^1(1) = 6 \Rightarrow 3c_1 + 3c_2 = 6 \end{cases}$$

$$3(1) + 3c_2 = 6 \Rightarrow c_2 = 1$$

$$a_n = 3^n + n(3)^n$$ رابطه بازگشتی

TALASH

مثال: رابطه بازگشتی دنباله فیبوناچی (فیبوناتچی) را تعیین نمایید.

$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$

$a_1 = 1$ ، $a_2 = 1$

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

$$x^2 = x + 1 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

$a = 1$ ، $b = -1$ ، $c = -1$

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4(1)(-1) = 5$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{5}}{2(1)} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$a_n = c_1 x_1^n + c_2 x_2^n$$

$$a_n = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

$$a_1 = 1 \Rightarrow c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^1 + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^1 = 1$$

$$a_2 = 1 \Rightarrow c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 = 1$$

$$c_1 \left(\frac{1+5+2\sqrt{5}}{4} \right) + c_2 \left(\frac{1+5-2\sqrt{5}}{4} \right) = 1$$

$$c_1 (3+\sqrt{5}) + c_2 (3-\sqrt{5}) = 2$$

$$\begin{cases} c_1(1+\sqrt{5}) + c_2(1-\sqrt{5}) = 2 \\ c_1(3+\sqrt{5}) + c_2(3-\sqrt{5}) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + \sqrt{5}c_1 + c_2 - \sqrt{5}c_2 = 2 \\ 3c_1 + \sqrt{5}c_1 + 3c_2 - \sqrt{5}c_2 = 2 \end{cases}$$

از تفاضل روابط

$$2c_1 + 2c_2 = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0 \quad *$$

$$-3\begin{cases} c_1 + \sqrt{5}c_1 + c_2 - \sqrt{5}c_2 = 2 \\ 3c_1 + \sqrt{5}c_1 + 3c_2 - \sqrt{5}c_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3c_1 - 3\sqrt{5}c_1 - 3c_2 + 3\sqrt{5}c_2 = - \\ 3c_1 + \sqrt{5}c_1 + 3c_2 - \sqrt{5}c_2 = \end{cases}$$

$$-2\sqrt{5}c_1 + 2\sqrt{5}c_2 = -4$$

$$-2\sqrt{5}(c_1 - c_2) = -4 \Rightarrow c_1 - c_2 = \frac{-4}{-2\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad **$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 - c_2 = \frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases} \Rightarrow c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$n \geq 1$ برای

Year. Month. Date. ( ) Subject :

مثال: رابطه بازگشتی دنباله لوکا را تعیین نمائید

$$a_1=1 ، a_2=3 \quad , \quad a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$$

$$1, 3, 4, 7, 11, 18, \dots$$

$$x^2=x+1 \Rightarrow x^2-x-1=0 \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$a_n=c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$a_1=c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1+c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1=1$$

$$\Rightarrow$$

$$a_2=c_1\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2+c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2=3$$

$$\begin{cases} c_1(1+\sqrt{5})+c_2(1-\sqrt{5})=2 \\ c_1(3+\sqrt{5})+c_2(3-\sqrt{5})=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1+c_2=2 \\ c_1-c_2=0 \Rightarrow c_1=c_2 \end{cases} \Rightarrow c_1=c_2=1$$

$$a_n=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

مثال: رابطه بازگشتی $a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$ را تعیین کنید

$(a_2 = -26 \ ، \ a_1 = -8 \ ، \ a_0 = -1)$

$x^3 = 6x^2 - 11x + 6$

مجموع ضرایب صفر

$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0 \Rightarrow$

$$\begin{array}{l|l} x^3 - 6x^2 + 11x - 6 & x-1 \\ \hline & x^2 - 5x + 6 \end{array}$$

یکی از ریشه ها ۱

$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x^2 - 5x + 6) = (x-1)(x-2)(x-3) = 0$

$x = 3 \ ، \ x = 2 \ ، \ x = 1$ ریشه ها

$a_n = c_1 x_1^n + c_2 x_2^n + c_3 x_3^n$

$a_n = c_1(1)^n + c_2(2)^n + c_3(3)^n = c_1 + 2^n c_2 + 3^n c_3$

$a_0 = -1 \Rightarrow c_1 + c_2 + c_3 = -1$

$a_1 = c_1 + 2c_2 + 3c_3 = -8$

$a_2 = c_1 + 2^2 c_2 + 3^2 c_3 = -26$

$\Rightarrow \begin{cases} c_1 = 4 \\ c_2 = -3 \\ c_3 = -2 \end{cases}$

$$a_n = 4 - 3(2^n) - 2(3^n)$$

مثال: رابطه بازگشتی $a_n = 2a_{n-1} - 2a_{n-2}$ را تعیین نمائید

(($a_1 = -2i$ ، $a_0 = 0$))

$$x^2 = 2x - 2 \Rightarrow x^2 - 2x + 2 = 0$$

$$a = 1 ، b = -2 ، c = 2 \Rightarrow \Delta = -4 \qquad ، \sqrt{-1} = i$$

$$z = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2(1)} = \frac{2 \pm \sqrt{4i^2}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i$$

$$z = a + bi \qquad (\text{عدد مختلط})$$

$$z = 1 + 1i \qquad \qquad \bar{z} = 1 - 1i$$

$$\tan\theta = \frac{b}{a} = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \qquad \qquad \tan\theta = \frac{b}{a} = -1$$

$$r^2 = \rho^2 = a^2 + b^2 \qquad \qquad \theta = -\frac{\pi}{4}$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$a = r\cos\theta \qquad \qquad \bar{z} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$b = r\sin\theta \qquad \qquad \bar{z} = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad \qquad \bar{z} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

از طرفی:

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \Rightarrow z^n = r^n(\cos\theta + i\sin\theta)^n$$

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) \qquad \text{قضیه موآور}$$

۵۷ ۹۶

Year. Month. Date. ( ) Subject :

$$a_n = c_1\left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^n + c_2\left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^n$$

$$a_n = c_1(\sqrt{2})^n\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right) + c_2(\sqrt{2})^n\left(\cos\frac{n\pi}{4} - i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$$

$$a_0 = c_1(\sqrt{2})^0\left(\cos\frac{0\pi}{4} + i\sin\frac{0\pi}{4}\right) + c_2(\sqrt{2})^0\left(\cos\frac{0\pi}{4} - i\sin\frac{0\pi}{4}\right) = 0$$

$$c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = -c_2$$

$$a_1 = c_1(\sqrt{2})^1\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) + c_2(\sqrt{2})^1\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right) = -2i$$

$$c_1(1+i) + c_2(1-i) = -2i$$

$$\begin{cases} c_1 + c_1 i + c_2 - c_2 i = -2i \\ c_1 = -c_2 \end{cases} \Rightarrow \cancel{-c_2} - c_2 i + \cancel{c_2} - c_2 i = -2i$$

$$-2c_2 i = -2i \Rightarrow c_2 = 1,\ c_1 = -1$$

$$a_n = (-1)(\sqrt{2})^n\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right) + (1)(\sqrt{2})^n\left(\cos\frac{n\pi}{4} - i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$$

$$a_n = \cancel{-(\sqrt{2})^n\cos\frac{n\pi}{4}} - (\sqrt{2})^n i\sin\frac{n\pi}{4} + \cancel{(\sqrt{2})^n\cos\frac{n\pi}{4}} - (\sqrt{2})^n i\sin\frac{n\pi}{4}$$

$$a_n = -2(\sqrt{2})^n\, i\sin\frac{n\pi}{4}$$

TALASH

۵۸

Year. Month. Date. ( ) Subject :

تعریف :

روابط بازگشتی غیر همگن با ضرایب ثابت

رابطه بازگشتی درجه k زیر غیرهمگن است

$$a_n = \underbrace{c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}}_{I} + f(n)$$

اگر A_n در رابطه همگن I صدق کند و B_n در رابطه بازگشتی غیرهمگن صدق کند آنگاه A_n+B_n نیز در رابطه غیرهمگن صدق می کند

$$A_n+B_n = c_1(A_{n-1}+B_{n-1}) + c_2(A_{n-2}+B_{n-2}) + \cdots$$

$$+ c_k(A_{n-k}+B_{n-k}) + f(n)$$

A_n جواب قسمت همگن رابطه و B_n را یک جواب خاص آن گویند.

مثال: اگر $a_n = 3a_{n-1} + 2 - 2n^2$

$$a_n = 3a_{n-1} \Rightarrow x = 3$$

$$A_n = C_1 (3)^n$$

$$\begin{cases} B_n = 2 - 2n^2 \\ B_n = pn^2 + qn + r \end{cases}$$

$$\underbrace{pn^2+qn+r}_{a_n \text{ به جای}} = 3\underbrace{\left(p(n-1)^2+q(n-1)+r\right)}_{a_{n-1} \text{ به جای}} + 2 - 2n^2$$

$$3p - 2 = p \Rightarrow p = 1$$

$$-6p + 3q = q \Rightarrow q = 3, \quad r = 2$$

$$B_n = n^2 + 3n + 2$$

$$a_n = A_n + B_n = C_1(3)^n + n^2 + 3n + 2$$

با فرض $a_0 = 2$ خواهیم داشت $C_1 = 1$

$$a_n = 3^n + n^2 + 3n + 2$$

حل روابط بازگشتی غیر همگن

اگر رابطه بازگشتی غیر همگن بصورت زیر داشته باشیم

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k} + b^n p(n) \quad (1$$

که در آن b عدد ثابت است و $p(n)$ چند جمله‌ای از درجه d برحسب n باشد برای این رابطه نسبت به روابط بازگشتی همگن معادله مشخصه بصورت زیر تعریف می‌شود

$$(x^k - c_1 x^{k-1} - c_2 x^{k-2} - \dots - c_k)(x-b)^{d+1} = 0 \quad (2$$

که x ها ریشه‌ها معادله را بدست می‌آوریم

مثال: رابطه بازگشتی $a_n = 2a_{n-1} + (n+5)3^n$ را تعیین نمائید.

همگن
$a_n = 2a_{n-1}$
$x = 2$

دو جمله‌ای درجه ۱
$d = 1$

عدد ثابت $b = 3$

$$(x-2)(x-3)^{1+1} = 0 \Rightarrow (x-2)(x-3)^2 = 0$$

$x = 2$ ، $x = 3$ مضاعف

$$a_n = c_1(2)^n + \underbrace{c_2(3)^n + c_3(n)(3^n)}_{\text{مضاعف}}$$

با توجه به حالت‌ها اولیه داده شده می‌توان c_i ها را بدست آورد

۶۲

Year. Month. Date. ( ) Subject :

تذکر: اگر $p(n)$ بصورت های زیر باشه

$p(n)=an^2+bn+c$ ، $d=2$

$p(n)=an+b$ ، $d=1$

$p(n)=c$ ، $d=0$

مثال: روش اول

$a_n=3a_{n-1}+4^n \Rightarrow a_n=3a_{n-1}+(1)(4^n)$

$k=1$ $p(n)=1$ $b=4$

عدد ثابت $d=0$

$a_n=3a_{n-1} \to x=3$

$k=1$

$d \to 0+1$

$(x-3)(x-4)=0 \Rightarrow (x-3)(x-4)=0 \Rightarrow x=3,\ x=4$

b

$a_n=c_1 3^n+c_2 4^n$

روش دوم:

$a_n=3a_{n-1}+4^n$

$a_{n-1}=3a_{(n-1)-1}+4^{n-1} \Rightarrow a_{n-1}=3a_{n-2}+4^{n-1}$

تقسیم

$\frac{a_n}{4}=\frac{3a_{n-1}}{4}+\frac{4^n}{4} \Rightarrow \frac{a_n}{4}=\frac{3}{4}a_{n-1}+4^{n-1}$

تفضل دو رابطه

$a_{n-1}-\frac{a_n}{4}=3a_{n-2}-\frac{3}{4}a_{n-1} \Rightarrow x-\frac{x^2}{4}=3-\frac{3}{4}x$

$x^2-7x+12=0 \Rightarrow x=3,\ x=4$

$a_n=c_1(3^n)+c_2(4^n)$

TALASH

۶۲

Year. Month. Date. ( ) Subject :

مثال: رابطه بازگشتی $a_n = 2a_{n-1} + n$ را تعیین نمائید.

$$a_n = 2a_{n-1} + (1)n^1$$

$x = 2$, $b = 1$, $d = 1$

$$(x-2)(x-1)^{1+1} = 0 \Rightarrow (x-2)(x-1)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 = 1 & \text{مضاعف} \\ x = 2 \end{cases}$$

$$a_n = c_1 2^n + c_2(1)^n + c_3(n)(1)^n$$

$$a_n = c_1 2^n + c_2 + c_3(n)$$

مثال: رابطه بازگشتی $a_n = 2a_{n-1} + n + 2^n$ را تعیین نمائید.

$$a_n = 2a_{n-1} + (1)n^1 + 2^n$$

$x = 2$, $b = 1$, $d = 1$, $x_2 = 2$

$$(x-1)^{1+1} = (x-1)^2$$

ریشه مضاعف ۱

$$(x-2)(x-1)^2(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 & \text{مضاعف} \\ x = 2 & \text{مضاعف} \end{cases}$$

$$a_n = c_1(1)^n + c_2(n)(1)^n + c_3(2)^n + c_4(n)(2^n)$$

$$a_n = c_1 + c_2 n + 2^n c_3 + c_4(n)2^n$$

۶۳

Year. Month. Date. ( ) Subject :

مثال: رابطه بازگشتی عبارت زیر را تعیین نمائید.

$$a_n = 3a_{n-1} + 4^n(2n+1)$$

$$(a_1 = 12 \ , \ a_0 = 0)$$

همگن $a_n = 3a_{n-1} \Rightarrow x = 3$

$$f(n) = 4^n(2n^1+1) \longrightarrow d=1$$

$$\hookrightarrow b = 4$$

$$(x-4)^{1+1} = (x-4)^2 \quad \text{مضاعف}$$

$$(x-3)(x-4)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 4 \quad \text{مضاعف} \end{cases}$$

$$a_n = c_1(3^n) + c_2(4)^n + c_3(n)(4^n)$$

1) $a_0 = c_1(3^0) + c_2(4)^0 + c_3(0)(4^0) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0$

2) $a_1 = c_1(3^1) + c_2(4)^1 + c_3(1)(4^1) = 12$

$$a_n = 3a_{n-1} + 4^n(2n+1)$$

$$a_2 = 3a_{2-1} + 4^2(2(2)+1) = 3a_1 + 80 \Rightarrow a_2 = 3(12) + 80$$

$$a_2 = 118$$

3) $a_2 = c_1(3^2) + c_2(4)^2 + c_3(2)(4^2) = 118$

از ۱، ۲، ۳ $\quad c_1 = 20 \ , \ c_2 = -20 \ , \ c_3 = 8$

$$a_n = 20(3^n) - 20(4^n) + 8n(4^n)$$

از مطالب گفته شده نتیجه می‌گیریم اگر در یک رابطه بازگشتی $f(n)=0$ رابطه بازگشتی همگن است در غیر اینصورت غیر همگن است.

رابطه بازگشتی خطی یا Liner اگر یک رابطه بازگشتی برحسب n باشد و اگر اندیس جملات بازگشتی بصورت کسر یا توام باشد رابطه غیر خطی است.

مثال: ۱) $4a_{n-2}-3a_{n-1}+6a_n=0$ همگن خطی

۲) $4a_n^2-4a_{n/2}+6a_{\sqrt{n}}=0$ همگن غیرخطی

۳) $4a_{n-2}-4a_{n-1}+6a_n=5$ ناهمگن خطی

۴) $4a_n^2-4a_{n/2}+6a_{\sqrt{n}}=-7$ ناهمگن غیرخطی

آنالیز ترکیبی

۱) تبدیل یا جایگشت

تعریف: یک تبدیل از یک مجموعه اشیاء عبارت از یک حالت از قرار دادن عضوها آن مجموعه کنار هم می باشد.

مثال: سه کتاب a و b و c را به چند طریق می توان کنار هم قرار داد

abc
acb
bac
bca
cab
cba

انتخاب اولی	انتخاب دومی	انتخاب سومی
۳	۲	۱

$3 \times 2 \times 1 = 6$

۲) فاکتوریل:

حاصلضرب تمام اعداد درست مثبت از n تا ۱ را بصورت $n!$ نمایش می دهیم (n فاکتوریل)

$$n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\dots(3)(2)(1)$$

$$7! = (7)(6)(5)(4)(3)(2)(1)$$

$$1! = 1 \quad , \quad 0! = 1$$

۶۶

Year. Month. Date. ( ) Subject :

* نکته : تبدیل n شیء از n شیء

$(n)_n = n!$

۳) تبدیل های r شیء از n شیء متمایز ($r < n$)

$$(n)_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال : به چند طریق می‌توان ۴ کتاب از ۷ کتاب مختلف را انتخاب کرد و آنها را در یک قفسه کنار هم قرار داد.

کلید حل جهت استفاده از تبدیل r شیء از n شیء

$$(7)_4 = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{7(6)(5)(4)(3!)}{3!} = 840$$

۴) ترکیب

تعداد حالتهایی که می‌توان r شیء را از بین n شیء (را) متمایز بدون جایگذاری و بدون در نظر گرفتن ترتیب آنها انتخاب کرد.

$$C_n^r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

TALASH

۶۷

Year. Month. Date. ( ) Subject :

مثال: به چند طریق می‌توان ۴ کتاب را از ۷ کتاب مختلف انتخاب کرد.

در اینجا ترتیب مهم نیست لذا ترکیب است

$$C_7^4 = \binom{7}{4} = \frac{7!}{4!(7-4)!} = \frac{7(6)(5)(4!)}{4!(3!)} = 35$$

تبدیل با تکرار:

تعداد تبدیلات n تایی از شیئی که دارای n شیئ، n_1، n_2، ...، n_k شیئ تکراری نظیر باهم باشند از فرمول زیر بدست می‌آید

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$$

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times n_3! \times \cdots \times n_k!}$$

به عبارت دیگر فرض کنید n شیئ داریم که دارای اشیاء متمایز نیستند و از k دسته غیر تهی تشکیل شده‌اند بطوریکه

۱) تمام اشیاء یک دسته یکسان هستند و در دسته i به تعداد n_i شیئ وجود دارند

TALASH

۶۸

Year. Month. Date. ( ) Subject :

۲) اشیاء در دسته‌های متفاوت تمایز نیستند (هیچ دو دسته‌ای عضو مشترک ندارند)

در این حالت جایگشت تعمیم یافته $p(n: n_1, n_2, \dots, n_k)$ را اگر

$n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$p(n: n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1!\, n_2!\, n_3! \cdots n_k!}$$

تعریف: اگر n_i ، $i = 1, 2, 3, \dots, k$ و k عدد طبیعی باشند

که مجموع آنها r باشد و $r < n$ آنگاه،

$$p(n: n_1, n_2, n_3, \dots, n_k) = \frac{p(n, r)}{n_1!\, n_2! \dots n_k!}$$

مثال: یک پارک یک ردیفه برای ماشینهای تولید شده در یک کارخانه، ۸۰

جای پارک ماشین دارد، می‌خواهیم ۱۵ ماشین کورولا، ۲۵ جیپ، ۳۰

وانت را در این پارکینگ پارک کنیم این کار به چند طریق ممکن

است؟ (فرض کنید ماشینهای تولید شده از هر نوع، از هر جهت یکسان باشند)

TALASH

۶۹

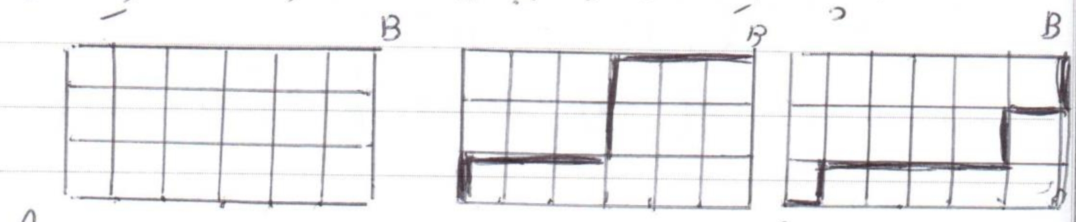
Year. Month. Date. ( ) Subject :

$r = ۱۵ + ۲۵ + ۳۰ = ۷۰$ و $n = ۸۰$

$$P(۸۰ : ۱۵, ۲۵, ۳۰) = \frac{P(۸۰, ۷۰)}{۱۵!\,۲۵!\,۳۰!}$$

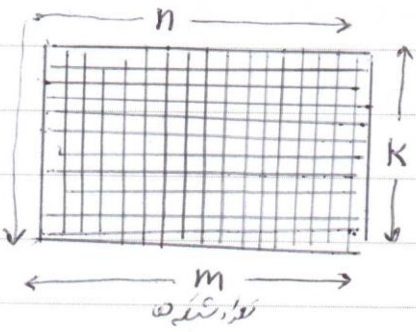
مسأله: فرض کنید شکل زیر شبکه‌ای از جاده‌ها را نشان می‌دهد که می‌توان از آن‌ها گذشت و از A به B رفت. کوتاه‌ترین مسیر از A مسیری تعریف می‌شود که در آن فقط می‌توان به راست (R) یا به بالا (U) رفت.

به چند طریق می‌توان از A به B رفت (تعداد کوتاه‌ترین مسیرها مورد نظر است)



(۱) (۲) (۳)

با توجه به شکل ۲ و ۳ مسیرهای مختلفی وجود دارد که به کمک ترکیب زیر می‌توان آن‌ها را بدست آورد.



$$\binom{m+k}{k}$$

در مسأله فوق $k=۳$ و $m=۶$

$$\binom{۶+۳}{۳} = \binom{۹}{۳} = \frac{۹!}{۳!(۹-۳)!} = \frac{۹\times۸\times۷\times۶!}{۳!\times۶!}$$

$= ۸۴$

۷۰

Year. Month. Date. ( ) Subject :

مثال: به چند طریق می‌توان اعداد ۱، ۱، ۱، ۵، ۵، ۷، ۷، ۷ را کنار هم قرار داد؟

$n = ۳+۲+۳ = ۸$ تعداد اعداد

$$P(8:3,2,3) = \frac{8!}{3!\,2!\,3!} = 560.$$

نکات:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

$$\binom{n}{1} = n$$

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} = \binom{n+1}{r}$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

اگر $n = 2k \Rightarrow \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n-1} = 2^{n-1}$

اگر $n = 2k+1$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^{n-1}$$

۷۱

Year. Month. Date. ( ) Subject :

مثال: از بین ۸ نفر به چند طریق می‌توان آن‌ها را به یک میهمانی دعوت کرد به قسمی که

الف: تعداد آن‌ها حداقل ۲ نفر باشد   ب: تعداد آن‌ها حداکثر ۶ نفر باشد

ج: تعداد آن‌ها فرد باشد   د: تعداد آن‌ها زوج باشد

الف: $T=\binom{8}{2}+\binom{8}{3}+\binom{8}{4}+\cdots+\binom{8}{8}=2^{8}-\binom{8}{0}-\binom{8}{1}=247$

ب: $T=\binom{8}{1}+\binom{8}{2}+\binom{8}{3}+\cdots+\binom{8}{6}=2^{8}-\binom{8}{0}-\binom{8}{7}-\binom{8}{7}=246$

ج: $T=\binom{8}{1}+\binom{8}{3}+\binom{8}{5}+\binom{8}{7}=2^{8-1}=2^{7}=128$

د: $T=\binom{8}{0}+\binom{8}{2}+\binom{8}{4}+\cdots+\binom{8}{8}=2^{8-1}=2^{7}=128$

اصل لانه کبوتری

اصل لانه کبوتری: اگر $(n+1)$ شیء (کبوتر) یا بیشتر را در n جعبه (لانه) قرار دهیم حداقل یک جعبه (لانه) شامل بیش از یک شیء (کبوتر) خواهد بود، به بیان دیگر اگر بیش از n شیء را در n جعبه قرار دهیم حداقل در یک جعبه دو شیء یا بیشتر قرار خواهد گرفت.

مثال ۱: از ۱۳ نفر حداقل ۲ نفر در یک ماه از سال متولد شده اند.

مثال ۲: از ۳۶۷ نفر حداقل ۲ نفر در یک روز از سال متولد شده اند

مثال ۳: از ۸ نفر حداقل ۲ نفر در یک روز هفته به دنیا آمده اند.

اصل لانه کبوتر

اگر m کبوتر، n لانه کبوتر را اشغال کنند و تعداد کبوترها بیش از تعداد لانه کبوترها باشند $(m>n)$ آنگاه، طبق اصل لانه کبوتر حداقل یک لانه کبوتر وجود خواهد داشت که دو یا بیشتر از دو کبوتر در آن قرار داده شده باشند.

۷۲

Year. Month. Date. ( ) Subject :

مثال: S یک زیرمجموعه ۳۷ عضوی از اعداد طبیعی است اگر اعضای S را بر عدد ۳۶ تقسیم کنیم حداقل دو عضو از این مجموعه دارای باقیمانده یکسان بر ۳۶ هستند.

$n \in N$

$$\begin{array}{r|l} n & ٣٦ \\ \hline r & q \end{array}$$

$n = ٣٦q + r$

S مجموعه ۳۷ عضوی اعداد طبیعی

$r = ٠, ١, ٢, ٣, \ldots, ٣٤, ٣٥$

مجموعه باقیمانده ها $A = \{٠, ١, ٢, ٣, \ldots, ٣٤, ٣٥\}$

$n(A) = ٣٦$ ، $n(S) = ٣٧$

مطابق اصل لانه کبوتری حداقل دو عضو از مجموعه S دارای باقیمانده یکسان بر ۳۶ خواهند بود.

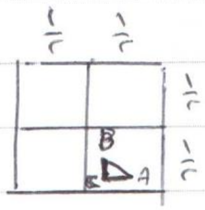
TALASH

۷۴

Year. Month. Date. ( ) Subject :

مثال: پنج نقطه داخل مربعی به ضلع ۱ مفروض اند.

ثابت کنید حداقل فاصله دو نقطه از این پنج نقطه کمتر از $\frac{\sqrt{2}}{2}$ است.



$n(S)=5$ نقطه‌ها

$n(M)=4$ لانه‌ها

$n(M)<n(S)$

مطابق اصل لانه کبوتری در یکی از مربع‌ها حداقل ۲ نقطه وجود دارد.

«نقطه روی مرز متعلق به هر دو مربع است»

فرض کنیم A و B دو نقطه از ۵ نقطه، که مطابق اصل لانه کبوتری

در یک مربع قرار دارند، مطابق قضیه فیثاغورس

$(AB)^2=(AC)^2+(BC)^2$ $\qquad |AC|<\frac{1}{2}$

$|BC|<\frac{1}{2}$

$(AB)^2<\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2$

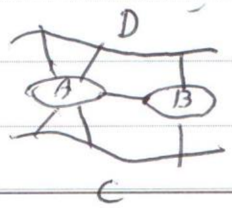
$(AB)^2<\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2} \Rightarrow |AB|<\sqrt{\frac{1}{2}} \Rightarrow |AB|<\frac{1}{\sqrt{2}}$

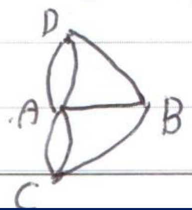
$|AB|<\frac{\sqrt{2}}{2}$

« آشنایی با گراف ها »

ابتدا چند مثال به بحث گراف ها می پردازیم

1) در قرن هجدهم میلادی شهر کونیگسبرگ از دو ساحل و یک رودخانه و دو جزیره تشکیل شده بود. در آن زمان هفت پل این چهار منطقه را به هم وصل می کردند. معمای زیر سال ها مردم شهر را سرگرم کرده بود. آیا امکان دارد با آغاز از یکی از این مناطق در شهر گشتی زده از هر پل یکبار و تنها یک بار گذشت و به مکان اول بازگشت؟ اویلر در سال 1736 با حل مسأله پل های کونیگسبرگ نظریه گراف ها را بنیان گذاشت. وی به هر یک از این چهار منطقه نقطه ای از صفحه را تخصیص داد و به ازای هر پل بین دو منطقه پاره خط یا کمانی بین دو نقطه متناظر با آن ها رسم کرد. بدین ترتیب مطابق زیر هم مدل ریاضی درست یافته و به سادگی پاسخ معما را که منفی است دریافت





۷۷

Year. Month. Date. ( ) Subject :

امروزه این مدل را یک گراف یا به سبب وجود چند به اصطلاح خط

بین دو نقطه به طور دقیق تر یک گراف چندگانه می‌نامند.

مثال ۲: فرض می‌کنیم پنج تیم به نام‌های a, b, c, d, e باید دو به دو

با یکدیگر مسابقه بدهند پس از چندی می‌بینیم که

a با b, c, e مسابقه داده (در همه پیروز شده است)

b با a, d روبرو شده (و از هر دو شکست خورده است)

c با a, d, e مسابقه داده (بر d و e پیروز شده و از a شکست خورده)

d با b, c, e بازی کرده (b و e را شکست داده و از c شکست خورده است)

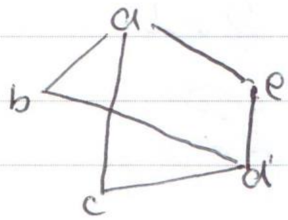
e با a, c, d مسابقه داده (پیروزی‌ها و شکست‌های e قبلاً مشخص شده‌اند)

این وضعیت را می‌توانیم به صورت یک نمودار در صفحه مشخص کنیم به ازای

هر تیم یک نقطه در نظر می‌گیریم و دو نقطه را با پاره‌خط یا کمانی به هم وصل می‌کنیم

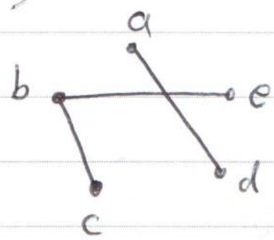
TALASH

هرگاه تیم ها متناظر با هم مسابقه داده باشند ، شکل ۱ مدل مربوط به این وضعیت را نشان میدهد



(شکل ۱)

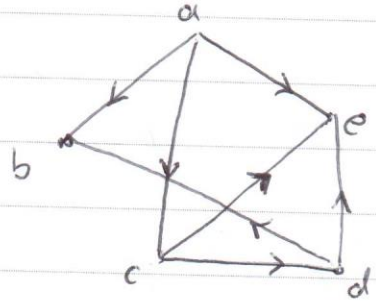
ممکن است به این وضعیت نمودار دیگری نسبت داد و آن نمودار مربوط به مسابقات انجام نشده است . برای این کار باز هم به ازای هر تیم یک نقطه در نظر میگیریم و این بار دو نقطه را با پاره خطی به هم وصل میکنیم هرگاه دو تیم مربوط هم بازی نکرده باشند ، نمودار مربوط به این وضعیت که در شکل ۲ نمایش داده است نشان میدهد که برای تکمیل این دور از مسابقات سه مسابقه دیگر باید برگزار شوند



(شکل ۲)

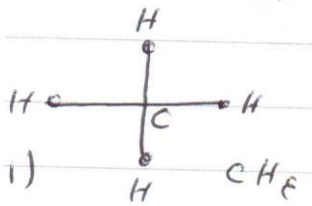
فرض میکنیم که این مسابقات حتماً باید برنده هم داشته باشند (برنده ها را قبلاً مشخص کرده ایم) لذا میتوانیم هنگام رسم شکل ۱ به جای صرفاً پاره خط ، پاره خط جهت دار رسم کنیم که جهت آن از برنده به سوی

بازنده باشد. با این ترتیب شکل ۳ بدست می‌آید این گراف نشان می‌دهد که مثلاً تیم e از سه تیم a، c، d شکست خورده و هنوز برنده نشده است. چنین گرافی را گراف جهت دار می‌نامیم.

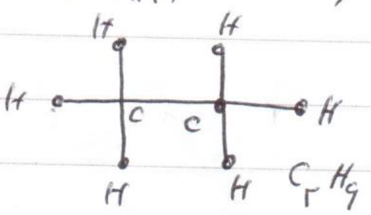


ش ۳

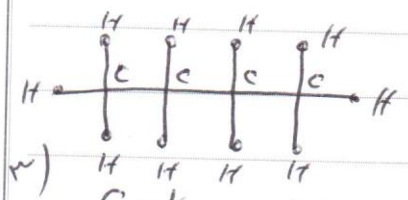
مثال: در درس شیمی به هیدروکربن‌های اشباع شده نمودارهایی نسبت می‌دهند تا ساختار شیمیایی آنها را به نمایش بگذارند در شکل‌های زیر چند نمونه از این هیدروکربن‌ها را که فرمول آنها C_nH_{2n+2} است را مشاهده می‌نمائید:



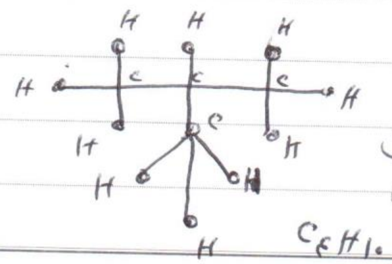
۱) CH_4 متان



۲) C_2H_6 اتان



۳) C_4H_{10} بوتان



C_4H_{10} ایزوبوتان

۸۰

Year. Month. Date. ( ) Subject :

مثال: شرکتی مایل است برای چهار شغل تمام وقت A_1، A_2، A_3 و A_4 کارمند استخدام کند. پنج نفر به نام های B_1، B_2، B_3، B_4 و B_5 برای تصدی این شغل ها داوطلب می شوند که طبق فهرست زیر برخی صلاحیت تصدی بیش از یک کار را دارند.

B_1 می تواند سه شغل A_1، A_2 و A_3 را اداره کند.

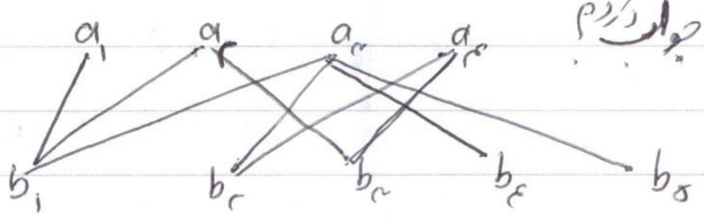
B_2 " دو شغل A_3 و A_4 را بپذیرد.

B_3 قادر است هر یک از شغل های A_2، A_3 و A_4 را انجام دهد.

B_4 و B_5 هم می توانند تنها متصدی شغل A_3 باشند.

آیا با این پنج نفر، شرکت می تواند برای پست ها خالی متصدی پیدا کند؟

این مسأله چند جواب دارد؟



I) واضح است که برای تکلیف A_1 تنها یک داوطلب وجود دارد ولذا این شغل به B_1 تنها داوطلب احراز صلاحیت داده می‌شود

II) با انتخاب B_1 ، B_2 واجد الشرایط A_2 می‌گردد چون B_2 و B_3 تنها دو داوطلب احراز صلاحیت A_3 هستند و B_2 قبلاً به کار A_2 گماشته شده است ، A_3 باید الزاماً به B_3 سپرده شود حال ما تکلیف A_4 را دو داوطلب باقی مانده ، B_4 و B_5 پس این مسأله تنها دو جواب دارد

$B_1 \longrightarrow A_1$

$B_2 \longrightarrow A_2$

$B_3 \longrightarrow A_3$

$B_4 \longrightarrow A_4$

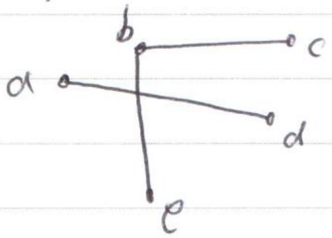
$B_5 \longrightarrow A_4$

چند تعریف و قرارداد

در زندگی پیچیده‌ی امروزی با مسائلی فراوان برمی‌خوریم که برای حل آنها مجبوریم از مدل ریاضی مانند گراف استفاده کنیم

تعریف: گراف (ساده) G زوج مرتبی چون (V, E) است که در آن V مجموعه‌ای متناهی و ناتهی است و E زیرمجموعه‌ای از مجموعه‌های دوعضوی V است. اعضای V را رأس‌های G و اعضای E را یالهای G می‌نامیم. مجموعه رأس‌های G را با $V(G)$ و مجموعه یالهای آن را با $E(G)$ هم نمایش می‌دهند.

مثال: اگر $V=\{a,b,c,d,e\}$ و $E=\{\{a,d\},\{b,c\},\{b,e\}\}$ آنگاه



(پنج رأس و سه یال)

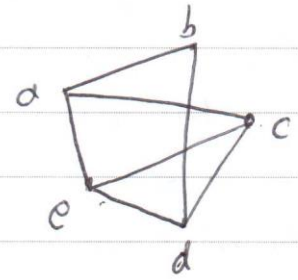
قرارداد: اگر در گراف G، $u,v\in V(G)$ و $\{u,v\}\in E(G)$ برای سادگی به جای $\{u,v\}$ می‌نویسیم uv و می‌گوییم در G دو رأس u و v مجاورند، رأس‌های u و v بر یال uv واقعند.

۸۳

Year. Month. Date. ( ) Subject :

مثال: اگر $V=\{a,b,c,d,e\}$ و $E=\{ab,ac,ae,bd,cd,ce,de\}$

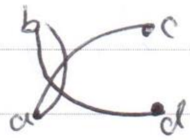
گراف نظیر عبارت فوق ۵ راس و ۷ یال دارد

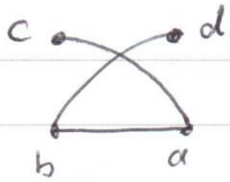


دو راس a و b مجاورند زیرا $ab\in E$ ولی

دو راس b و e مجاور نیستند زیرا $be\notin E$

نمودار گراف $V(G)=\{a,b,c,d\}$ ، $E(G)=\{ab,ac,bd\}$ را رسم کنید

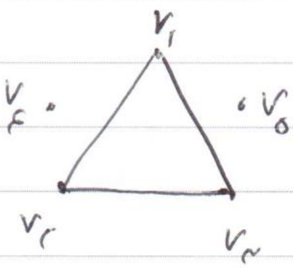




برای راحتی در بیان راس را نقطه و یال را خطی نام، توجه شود که

نمودار گراف برای درک بهتر مطلب باید حتی الامکان ساده رسم شود.

گراف زیر یک گراف سه بخشی است



۸۴
Year. Month. Date. ( ) Subject :

نکات :

۱) انتهای یک یال بر یال واقع است و بالعکس

۲) دو راس که بر یال مشترک واقع اند مجاور هستند

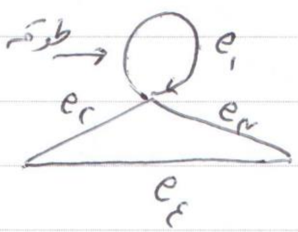
۳) یالی با دو انتهای یکسان را طوقه نامند

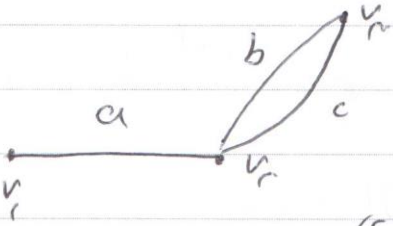
۴) یال با دو انتهای مجزا را پیوندی نامند.

۵) اگر هر دو مجموعه راسها و یالهای گراف متناهی باشند گراف متناهی در غیر اینصورت نامتناهی. (بحث ما پیرامون متناهی ها می باشد)

۶) گراف با تنها یک راس را بدیهی و دیگر گراف ها را نابدیهی می نامیم

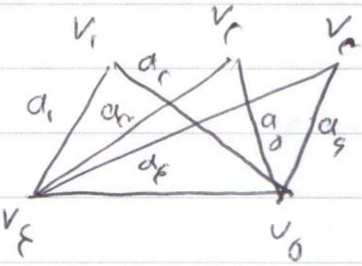
۷) اگر گراف دارای طوقه نبوده و هیچ دو تایی از پیوند هایش به یک زوج راس متصل نباشد گراف ساده است (قسمت عمده مطالعه ما مربوط به گراف ساده است)





گراف غیرساده

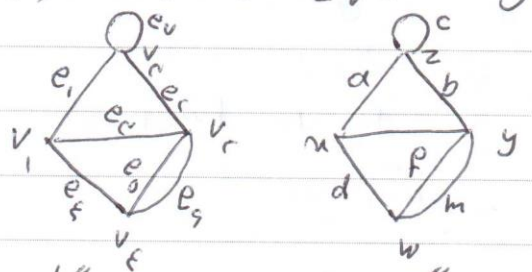
زیرا پیوندهای b و c به (v_2, v_3) متصل می شوند.



گراف ساده.

یکریختی گرافها

دو گراف G و H یکسان اند $(G = H)$ اگر $V(G) = V(H)$ و $E(G) = E(H)$، اگر دو گراف یکسان باشند آنها را به روشنی می‌توان به وسیله نمودارهای همانند نشان داد، اما ممکن است گرافهایی که همانند نیستند نیز امکان یک نمودار را داشته باشند.



ب) گراف H　　　　الف) گراف G

گراف‌های الف و ب یکسان نیستند اما یکریخت اند

$G \cong H$ (G و H یکریخت هستند)

ساختار G و H همانند می‌باشند و تنها در نامهای رأسها و یالها متفاوت اند

معرفی رده‌هایی خاص از گراف‌ها

۱) گراف ساده‌ای را که در آن هر جفت از رأسهای متمایز به وسیله یک یال به هم متصل باشند گراف کامل می‌نامند

۲) در مورد یکریختی درست یک گراف کامل با n رأس وجود دارد که آن را به وسیله K_n نشان می‌دهند.

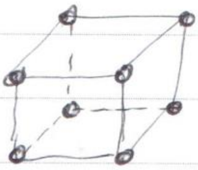
۳) گراف تهی، گرافی بدون یال است

مثال: K_5 (گراف کامل را رسم نمائید)

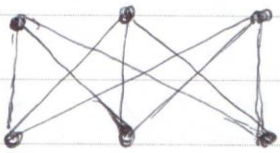
۴) گراف دوبخشی: گرافی است که مجموعه رأسها را بتوان به دو زیرمجموعه x و y بطوری افراز کرد که هر یال دارای یک انتها در x و یک انتها در y باشد. چنین افراز (x,y) را دوبخشی کردن گراف می‌نامند.

گراف دوبخشی کامل یک دوبخشی ساده با افراز (x,y) است که در آن هر راس x به هر راس y متصل است.

اگر $|x|=m$ و $|y|=n$ چنین گرافی را به وسیله K_{mn} نشان می‌دهند. گرافی که به وسیله رأسها و یالهای مکعب شکل زیر تعریف شود یک دوبخشی است.

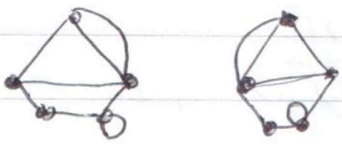


مثال: آیا نمودار زیر یک گراف دوبخشی K_{33} است.



آری: دوبخشی K_{33} است.

مثال: آیا گراف‌های زیر یکریختند



خیر

مثال: آیا گراف‌های زیر یکریختند

بلی

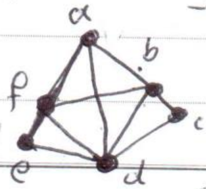
تذکر: دو یال می‌توانند همدیگر را قطع کنند ولی نقطه تلاقی آنها راس جدید محسوب نمی‌شود

مرتبه ، اندازه ، درجه

می‌دانیم که اگر مجموعه‌ای p $(p\in N)$ عضو داشته باشد تعداد زیرمجموعه‌های دو عضوی آن $\frac{p(p-1)}{2}$ است که با $\binom{p}{2}$ نمایش داده می‌شود بنابراین اگر گراف p راس و q یال داشته باشد $0 \le q \le \binom{p}{2} = \frac{p(p-1)}{2}$.

تعریف: در هر گراف $G=(V,E)$ تعداد اعضای مجموعه V را مرتبه G و تعداد اعضای مجموعه E را اندازه G می‌نامیم و معمولاً آنها را به ترتیب p و q نمایش می‌دهیم مرتبه G را با $P(G)$ و اندازه آن را با $q(G)$ هم نمایش می‌دهیم.

تعریف: درجه راس v از گراف G برابر با تعداد یال‌هایی از G است که از راس v می‌گذرند. این عدد را با $\deg_G v$ یا $\deg v$ نمایش می‌دهیم. اگر $\deg v$ فرد باشد v را یک راس فرد و اگر یک عدد زوج باشد v را یک راس زوج از گراف G نامیم



$\deg a = 2 \,،\, \deg b = 4 \,،\, \deg d = 5 \,،\, \dots$

نکته ۱: گرافی که از یک راس آن راس دیگر بیش از یک یال رسم شده باشد گراف چندگانه گوئیم و اگر از یک راس آن به راس دیگر حداکثر یک یال رسم شده باشد گراف ساده می نامیم

نکته ۲: تعداد گراف های ساده از مرتبه p برابر است با: $2^{\binom{p}{2}} = 2^{\frac{p(p-1)}{2}}$

مثال: تعداد گراف های ساده با چهار راس را تعیین نمائید

$$2^{\binom{4}{2}} = 2^{\frac{4!}{2!(4-2)!}} = 2^{6} = 64$$

مثال: یک گراف ساده با ۵ راس حداکثر چند یال می تواند داشته باشد؟

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = 10$$

نکته: اگر $V=\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ مجموعه راس های گراف G با اندازه q باشد آنگاه

$$\sum_{i=1}^{p} \deg v_i = 2q$$

نکته: تعداد راس های فرد هر گراف زوج است

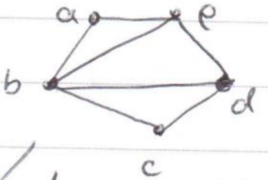
نکته: حداقل دو راس گراف G دارای یک درجه هستند.

۸۹

Year. Month. Date. ( ) Subject :

ماکزیمم و مینیمم درجه یک گراف

بزرگترین عدد در بین درجه راس ها گراف G را ماکزیمم درجه G می نامیم و آن را با Δ نمایش می دهیم و کوچکترین عدد در بین درجه راس های گراف G را مینیمم درجه G می نامیم و آن را با δ نمایش می دهیم.



$\Delta = 4$ ، $\delta = 2$

مثال: G گرافی است از مرتبه ۸ و اندازه ۱۱ بطوریکه درجه هر راس آن ۲ و ۳ می باشد. این گراف چند راس از درجه ۲ دارد؟

حل: فرض می کنیم این گراف n راس از درجه ۳ داشته باشد. چون درجات رئوس دو برابر تعداد یالها می باشد پس

$$\underbrace{n(3)}_{\text{درجه ۳}} + \underbrace{(8-n)(2)}_{\text{درجه ۲}} = 2(\underbrace{11}_{\text{مرتبه}}) \Rightarrow n = 6$$

نکته: $0 \le \Delta \le p-1$ و $0 \le \delta \le p-1$

۹۰

Year. Month. Date. ( ) Subject :

مثال: کدام دنباله زیر درجه ها رأس های یک گراف ساده است.

۱) S: ۴,۳,۳,۲ ۲) S: ۴,۲,۱,۱,۱

۳) S: ۳,۲,۲,۱ ۴) S: ۴,۳,۲,۱,۰

حل: گزینه ۳ درست است

گزینه ۱ نادرست، زیرا گراف ۴ رأس دارد و حداکثر درجه هر رأس آن می‌تواند ۳ باشد

گزینه ۲ نادرست زیرا تعداد رأس های فرد باید زوج باشد

گزینه ۴ نادرست زیرا دو رأس با درجه های مساوی وجود ندارد.

مثال: آیا گرافی وجود دارد که دنباله درجه رأس هایش بصورت زیر باشد؟ (چرا؟)

S: ۶,۴,۴,۲,۱,۰

حل: روش اول: خیر زیرا تعداد رأس ها از درجه فرد باید زوج باشد در صورتیکه این گراف فقط یک رأس از درجه فرد دارد.

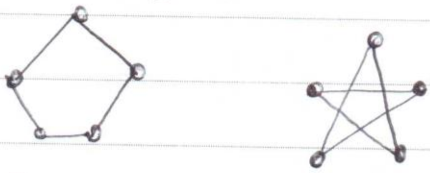
روش دوم: این گراف ۶ رأس دارد پس حداکثر درجه هر رأس می‌تواند ۵ باشد در صورتیکه در اینجا رأس با درجه ۶ نیز وجود دارد

TALASH

گراف های منتظم، کامل و تهی

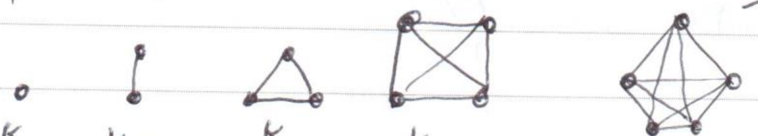
تعریف: عدد صحیح و نامنفی r داده شده است. گراف G از مرتبه p را r- منتظم می‌نامیم هرگاه درجه هر رأس G برابر با r باشد. هر گراف $(p-1)$- منتظم از مرتبه p را گراف کامل می‌نامیم و آن را با K_p نمایش می‌دهیم.

مثال: هر یک از دو گراف شکل زیر دو منتظم است ولی چون در این دو مثال $p=5$ و $p-1=4\neq 2$ این دو گراف کامل نیستند.



G $\quad$ G'

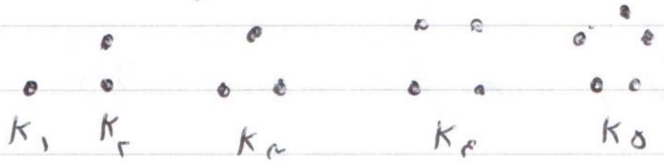
مثال: در شکل زیر پنج گراف کامل K_p، $1\leq p\leq 5$ رسم شده‌اند. در مورد هر یک از این مثال‌ها دیده می‌شود که تعداد یال‌های K_p برابر با $\frac{p(p-1)}{2}$ است.



K_1 $\quad$ K_2 $\quad$ K_3 $\quad$ K_4 $\quad$ K_5

قرارداد : گراف ۰ ـ منتظم از مرتبه‌ی p را با K_p نمایش می‌دهیم چون K_p هیچ یالی ندارد یعنی $E(K_p)=\emptyset$ این گراف را گراف تهی هم می‌نامیم

گراف‌های تهی با p را که $p\le 5$ را در شکل زیر مشاهده می‌فرمایید:



گراف‌های تهی از مرتبه‌های ۱ تا ۵

قرارداد : گراف ۰ منتظم از مرتبه p را با $\bar{K}_p$ نمایش میدهیم چون $\bar{K}_p$ هیچ یالی ندارد این گراف را گراف تهی هم می‌نامیم.

قضیه : تعداد یال‌های گراف کامل K_p، $p\in N$ برابر با $\frac{p(p-1)}{2}$ است

$$q=\binom{p}{2}=\frac{p(p-1)}{2}$$

نکته : اگر گراف G از مرتبه p، r منتظم باشد

$$rp=2q \quad , \quad q=\frac{rp}{2}$$

۹۳

Year. Month. Date. ( ) Subject :

مثال: تعداد یال‌های گراف کامل K_5 را بدست آورید

$q=\binom{p}{2}$

$q=\binom{5}{2}=\frac{5!}{2!\,3!}=10$

مثال: فرض کنید گراف G، ۳ منتظم و $q=2p-3$ مطلوب است محاسبه p و q و رسم گراف

$rp=2q$

$$\begin{cases} 3p=2q \\ q=2p-3 \end{cases} \Rightarrow q=9 \Rightarrow 9=2p-3 \Rightarrow 2p=12 \Rightarrow p=6$$

مثال: آیا گراف ۵ منتظم از مرتبه ۱۳ وجود دارد؟

$rp=2q$

$5(13)=2q \Rightarrow q=\frac{65}{2} \notin N$ چنین گرافی وجود ندارد

مثال: اگر به گراف ۴ منتظم از مرتبه p، ۷ یال اضافه کنیم گراف کامل بدست می‌آید p را بدست آورید.

$rp=2q$ ، $r=4$

$4p=2q \Rightarrow \frac{4}{2}p=q \Rightarrow \frac{4}{2}p+7=\frac{p(p-1)}{2}$

$4p+14=p^2-p$

$$p^2-5p-14=0 \Rightarrow \begin{cases} p=7 & \text{ق.ق} \\ p=-2 & \text{غیر قابل قبول} \end{cases}$$

مثال: مرتبه یک گراف کامل $\frac{1}{4}$ اندازه آن است اندازه این گراف را بدست آورید

$$p=\frac{1}{4}q \Rightarrow p=\frac{1}{4}\left(\frac{p(p-1)}{2}\right)$$

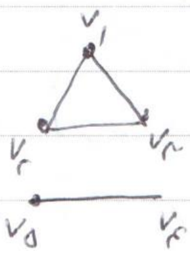
$$p=9 \Rightarrow q=\binom{9}{2}=\frac{9!}{2!\,7!}=36$$

گراف مکمل یک گراف

تعریف: گراف $G=(V,E)$ را در نظر می‌گیریم گراف $G'=(V,E')$ را مکمل گراف G گویند در صورتیکه به ازای هر a، b از V

اگر $ab\in E$ آنگاه $ab\notin E'$ و اگر $ab\notin E$ آنگاه $ab\in E'$

به عبارت دیگر مکمل گراف G گرافی است که از ترکیب آن با G یک گراف کامل است



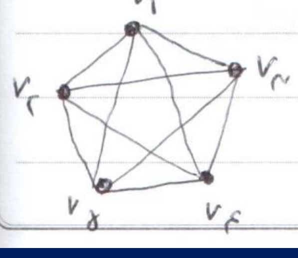
مثال: نمودار گراف $G=(V,E)$ بصورت زیر است

الف: مجموعه‌های $V(G)$ و $E(G)$ را مشخص کنید

$$V(G)=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\} ، E(G)=\{v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3, v_4v_5\}$$

ب: $\bar{E}=\{uv \mid u\neq v,\ uv\notin E\}$

$$\bar{E}=\{v_1v_5, v_1v_4, v_2v_4, v_2v_5, v_3v_5, v_3v_4\}$$

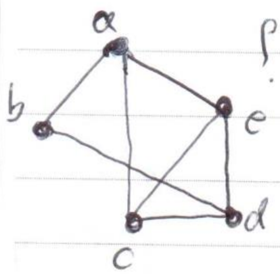


98

Year. Month. Date. ( ) Subject :

مسیر گراف و دور گراف

تعریف : اگر u و v دو راس متفاوت از راس‌های گراف G باشند یک مسیر از u به v از گراف G دنباله‌ای متشکل از m+1 ، $m \in N$ راس دو به دو متفاوت است که از u آغاز و به v ختم می‌شود و هر دو راس متوالی این دنباله در G مجاورند ، عدد m را طول این مسیر از گراف G می‌نامیم. می‌پذیریم که دنباله‌ای متشکل از تنها یک راس v یک مسیر با طول صفر از v به v از گراف G باشد.

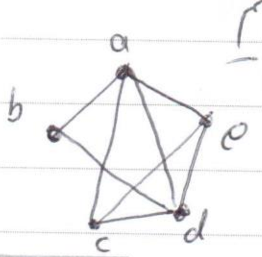


مثال: در گراف زیر از a به b چند مسیر وجود دارد؟

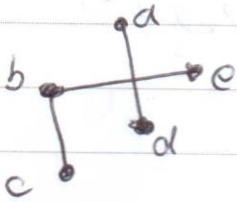
I) a,b
II) a,c,d,b
III) a,e,d,b
IV) a,c,d,b
V) a,e,c,d,b

پنج مسیر

تعریف: گراف G را همبند می‌نامیم هرگاه بین هر دو راس آن مسیری وجود داشته باشد. در غیر اینصورت G را ناهمبند می‌نامیم.



همبند



ناهمبند

۹۶

Year. Month. Date. ( ) Subject :

تعریف : یک دور از گراف G دنباله ای چون $v_1, v_2, v_3, \dots, v_m, v_{m+1}=v_1$

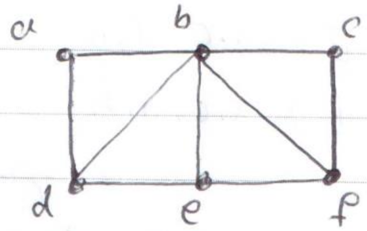
با شرط $m \geq 3$ متشکل از $m+1$ راس G است که در آن v_i ها

$1 \leq i \leq m$ دو به دو متمایزند و هر دو راس متوالی این دنباله در G مجاورند.

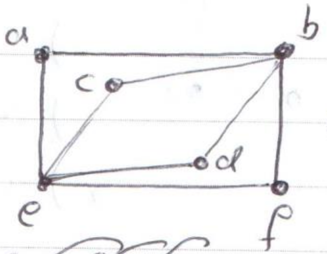
عدد m را طول این دور از گراف G می نامیم.

گراف اویلری : گراف همبندی که درجه تمام راس های آن زوج باشد

را یک گراف اویلری گوییم.



همیلتنی



اویلری

همیلتنی : گراف همیلتنی

گراف G از مرتبه p ($p \geq 3$) را همیلتنی گوییم هرگاه دوری به طول

p داشته باشد دور مذکور را یک دور همیلتنی نامند.

نکته ۱: اگر $p \geq 3$ هر K_p یک گراف همیلتنی است

نکته ۲: درجه هر راس یک گراف همیلتنی حداقل دو است.

نکته ۳: هر گراف همیلتنی همبند است.

نکته ۴: تعداد مسیرهای متمایز در گراف کامل K_p $(p \geq 2)$ از راس u به راس v $(u \neq v)$ برابر

$$\sum_{i=0}^{p-2} \frac{(p-2)!}{i!}$$

مثال: اگر u , v دو راس متمایز گراف K_4 باشد

چند مسیر متمایز از u به v وجود دارد.

$$\text{تعداد مسیرها} = \sum_{i=0}^{4-2} \frac{(4-2)!}{i!} = \sum_{i=0}^{2} \frac{2!}{i!} = \frac{2}{0!} + \frac{2}{1!} + \frac{2}{2!} = 5$$

نکته: تعداد مسیرهای به طول یک در گراف K_p برابر تعداد یال ها است.

نکته: گراف کامل K_p اویلری است هرگاه p عددی فرد باشد.

نکته: به ازای هر عدد طبیعی n ، $3 \leq n \leq p$ گراف K_p دوری به طول n وجود دارد.

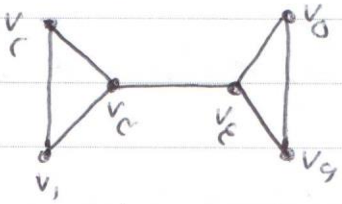
۹۸

Year. Month. Date. ( ) Subject :

مثال: نمودار گراف $G=(V,E)$ بصورت زیر است

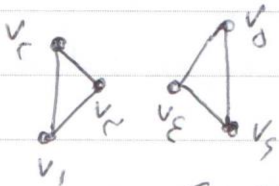
الف: تمام دورهای گراف G را مشخص کنید

ب: چه یالی از گراف G را حذف کنیم که گراف حاصل ۲ منتظم از مرتبه ۳ باشد.



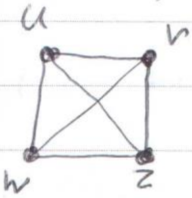
الف: دور $v_1 v_3 v_2 v_1$

" $v_4 v_5 v_6 v_4$



ب: حذف $v_3 v_4$

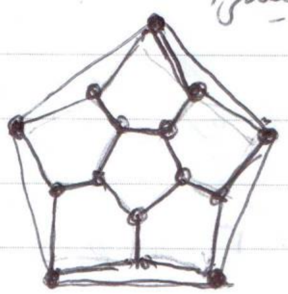
مثال: اگر $p=4$ مسیرهای از u به v در K_4 را تعیین نمایید



1) u, v 2) u, z, v 3) v, w, z, u

4) u, w, v 5) u, z, w, v

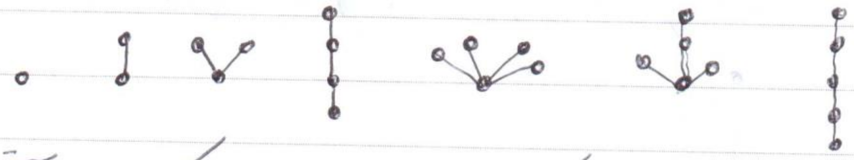
آیا گراف زیر همیلتنی است



(((درخت)))

گراف همبندی را که هیچ دوری نداشته باشد درخت نامیم.

مثال: در شکل‌های زیر درخت‌ها مرتبه ۱ تا ۵ رسم شده است



گراف مربوط به هر هیدروکربن C_nH_{2n+2} نیز یک درخت است.

قضیه: بین هر دو راس هر درخت مفروض دقیقاً یک مسیر وجود دارد.

قضیه: هر درختی که بیش از یک راس داشته باشد دست کم دو راس از درجه یک دارد

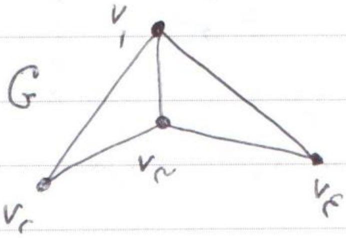
قضیه: اگر T درختی با p راس و q یال باشد آنگاه $p=q+1$

(((هر راس درجه ۱ در درخت را یک برگ می‌نامیم)))

گراف ها و ماتریس ها

گراف $G=(V,E)$ با $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ و

$E=\{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_2v_3, v_3v_4\}$ در شکل زیر رسم شده است



به این گراف ماتریس 4×4 چون زیر

$A=[a_{ij}]$ نسبت میدهیم (چهار سطر و چهار ستون) در آرایه a_{ij}

از این ماتریس ۱ است هرگاه $v_iv_j\in E$ و ۰ است هرگاه $v_iv_j\notin E$

$$A:\quad \begin{array}{c|cccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \hline v_1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ v_2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ v_3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ v_4 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

۱۰۱

Year. Month. Date. ( ) Subject :

توجه شود که:

۱) درایه های روی قطر اصلی همگی صفرند زیرا گراف ها (ساده) موضوع بحث ما «طوقه» ندارند. یعنی هیچ رأسی با خودش مجاور نیست.

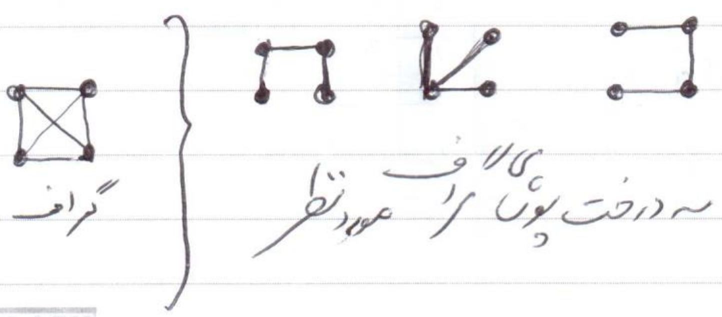
۲) تعداد سطرهای این ماتریس برابر است با تعداد ستون های آن ماتریس مربعی است

۳) هر درایه ی ماتریس A یا صفر است یا یک $a_{ij} \in \{0,1\}$

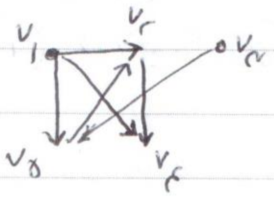
۴) ماتریس A متقارن است $A_{ij}=A_{ji}$

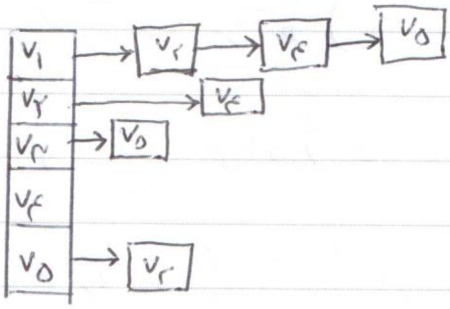
مثال: گراف نظیر ماتریس $A=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}$ را رسم کنید.

درخت فراگیر: درختی که تعدادی از یال ها و تمام رئوس G را در بر دارد، درخت فراگیر نامیده می شود.



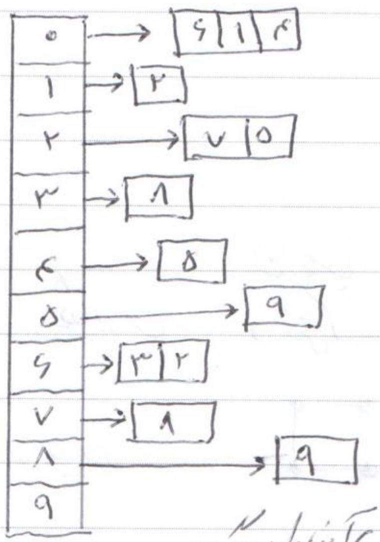
گراف جهت دار و ماتریس مجاورت آن





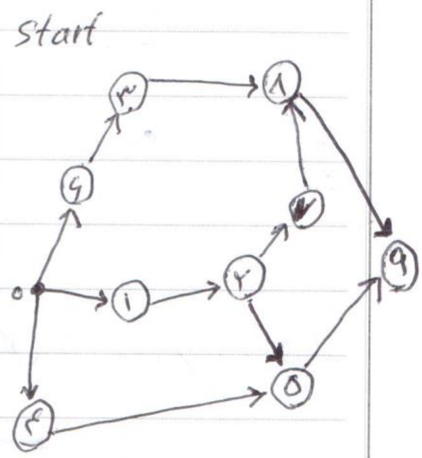
$$
\begin{array}{c|ccccc|}
 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\
\hline
v_1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
v_2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
v_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
v_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
v_5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
\end{array}
$$

مثال: گراف متعلق به جدول زیر را رسم کنید.



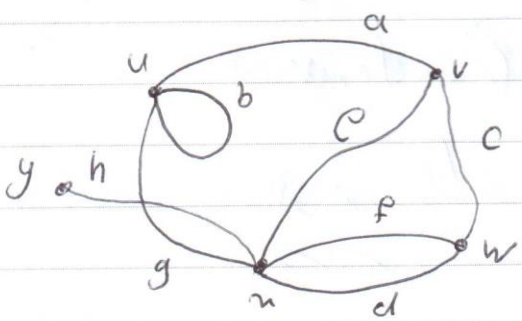
in degree

۰	۰
۱	۱
۲	۲
۳	۱
۴	۱
۵	۲
۶	۱
۷	۱
۸	۲
۹	۲



* درجه هر راسی که بردار به آنها وارد می گردد

مثال: ماتریس وقوع گراف زیر را تعیین نمائید.



	a	b	c	d	e	f	g	h
u	۱	۲	۰	۰	۰	۰	۱	۰
v	۱	۰	۱	۰	۱	۰	۰	۰
w	۰	۰	۱	۱	۰	۱	۰	۰
x	۰	۰	۰	۱	۱	۱	۱	۱
y	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱

ماتریس وقوع: ماتریس وقوع وابسته به گراف:

فرض کنید G یک گراف، V مجموعه رئوس و E مجموعه یالهای

آن است. وقوع G یک ماتریس $n \times m$ است که بصورت $M_G=[m_{ve}]$

۱۰۴

Year. Month. Date. ( ) Subject :

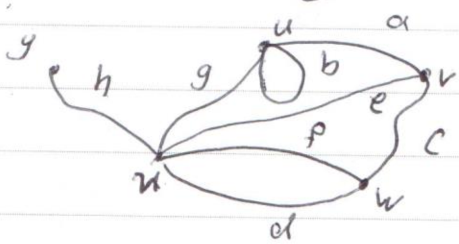
نشان میدهیم که در آن v یک راس و e یک یال و m_{ve} برابر تعداد دفعاتی است که راس v و یال e برهم واقع شوند در اینصورت m_{ve} یکی از مقادیر ۰، ۱، ۲، ... را اختیار می‌کند.

ماتریس مجاورت :

گراف G یک ماتریس مربعی $n \times n$ بطوریکه $A_G=[a_{uv}]$ است که در آن a_{uv} برابر با تعداد یالهایی که راس u را به راس v وصل می‌کنند. هر طوقه دوبار شمرده می‌شود.

مثال: ماتریس مجاورت گراف مثال قبل را تعیین نمایید.

	u	v	w	x	y
u	۲	۱	۰	۱	۰
v	۱	۰	۱	۱	۰
w	۰	۱	۰	۲	۰
x	۱	۱	۲	۰	۱
y	۰	۰	۰	۱	۰



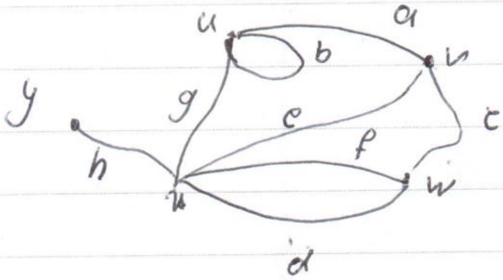
Year. Month. Date. ( ) Subject :

ماتریس فاصله :

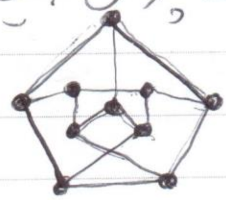
گراف G یک ماتریس مربعی $n\times n$ به صورت $D_G=[d(u,v)]$ است که در آن $d(u,v)$ برابر فاصله راس u با راس v است.

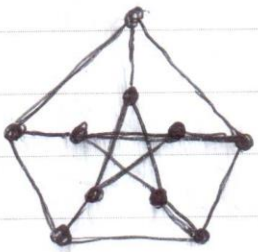
مثال : ماتریس فاصله مثال قبل را تعیین نمائید

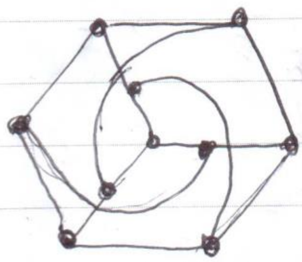
	u	v	w	x	y
u	۰	۱	۲	۱	۲
v	۱	۰	۱	۱	۲
w	۲	۱	۰	۱	۳
x	۱	۱	۱	۰	۱
y	۲	۲	۲	۱	۰



گراف پترسن : یک گراف بدون جهت با ۱۰ راس و ۱۵ یال است



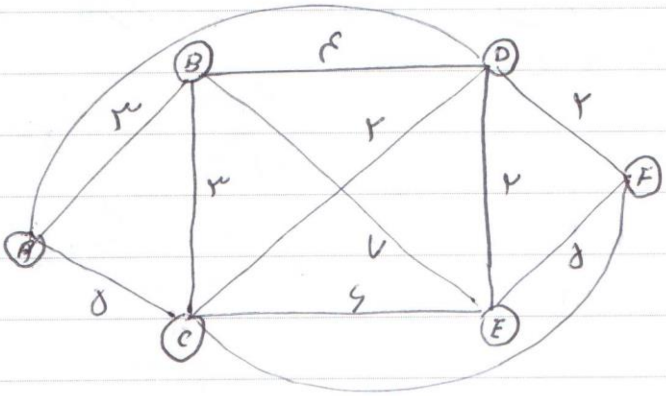




گراف وزن دار

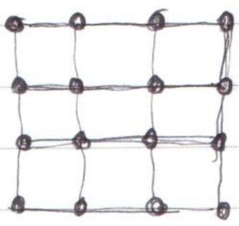
در یک گراف وزن دار، به هر یک از یال‌ها یک عدد (عدد مثبت) داده می‌شود معمولاً اعداد حقیقی به عنوان وزن یال‌ها استفاده می‌شود (معمولاً اعداد صحیح مثبت مورد نظر است)

مثال

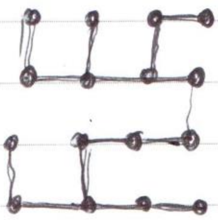


درخت پوشا:

درخت پوشا T از گراف همبند و بدون جهت G درختی است که شامل تمام رئوس و حداقل برخی یال‌ها می‌باشد

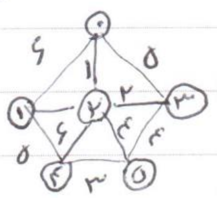


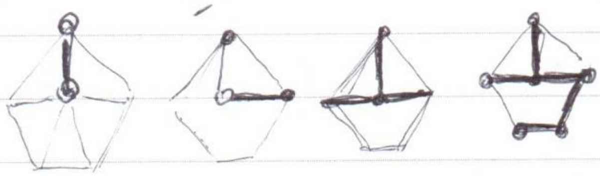
گراف



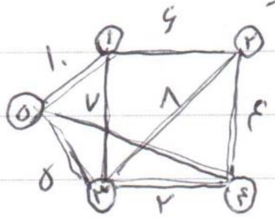
درخت پوشا

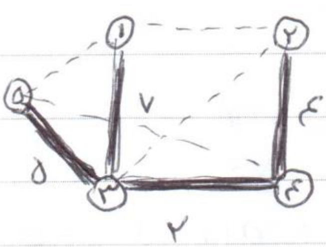
الگوریتم پریم : در این روش از یک راس شروع می‌کنیم و کمترین یال که از آن می‌گذرد را انتخاب می‌کنیم در مرحله بعد یالی انتخاب می‌شود که کمترین وزن را در بین یالهایی که از دو گروه موجود می‌گذرد داشته باشیم به همین ترتیب در مرحله بعد یالی انتخاب می‌گردد که کمترین وزن را در بین یالهایی که از سه گروه موجود می‌گذرد داشته باشیم این روال را آنقدر تکرار می‌کنیم تا درخت پوشای بهینه حاصل شود.





مثال : الگوریتم پریم را بر روی گراف زیر اعمال نمائید





رابطه ها و گراف ها

تعریف: هرگاه A و B دو مجموعه، هر زیرمجموعه $A \times B$ را یک رابطه از A در B نامند.

مثال ۱: روی مجموعه اعداد صحیح Z یک رابطه R را می‌توان چنین تعریف کرد: aRb یا $(a,b) \in R$ هرگاه $a \leq b$

این رابطه، همان رابطه معمولی (کوچکتر از یا مساوی با) در Z است. که روی Q و $\mathbb{R}$ نیز تعریف می‌شود.

مثال ۲: برای هر دو عضو $x,y \in Z$ تعریف می‌کنیم $(x,y) \in R$ یا xRy هرگاه $x-y$ مضربی از ۷ باشد.

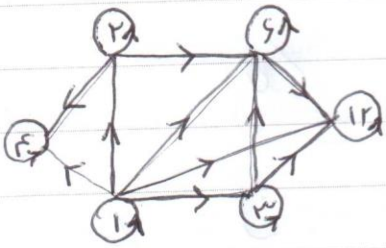
پس داریم $9R2$، $-3R11$ ولی $3 \not R 7$

مثال ۳: مجموعه $A = \{1,2,3,4,6,12\}$ مفروض است. به ازای هر دو عضو $a,b \in A$ تعریف می‌کنیم aRb هرگاه $a|b$. حال فرض کنید A یک مجموعه متناهی و R یک رابطه روی A باشد. به R گراف جهت دار G را بصورت زیر نسبت می‌دهیم: رأس های G اعضای A هستند و رأس a به رأس b متصل است هرگاه aRb

۱۰۹

Year. Month. Date. ( ) Subject :

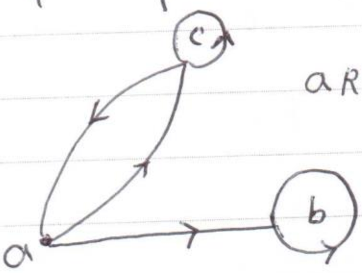
مثال: گراف جهت دار رابطه‌ی عاد کردن را متعلق به مثال قبل رسم نمائید



(شکل ۱)

تذکر مهم: هر گراف جهت دار شکل یک رابطه است.

مثال: از روی گراف زیر آیا رابطه‌ای روی مجموعه $A=\{a,b,c\}$ وجود دارد.



$aRb,\ aRc,\ cRa,\ cRc,\ bRb$

(شکل ۲)

از روی شکل می‌توان خاصیت بازتابی، متقارن بودن یا نبودن رابطه‌ها فوراً از روی گراف جهت دار مربوط تشخیص داد. یکی از ویژگی‌های رابطه‌ها که کاربرد فراوان دارد خاصیت پادمتقارن است: رابطه‌ی R را وقتی پادمتقارن گوئیم که به ازای هر زوج مرتب (a,b)، اگر $(a,b)\in R$ و $(b,a)\in R$ آنگاه $a=b$ مثلاً رابطه‌ی «کوچکتر از یا مساوی با» در مثال ۱ و رابطه عاد کردن در مثال ۳ دو رابطه‌ی پادمتقارن اند ولی رابطه‌ی مثال ۲ پادمتقارن نیست.

نکته :

۱) یک رابطه بازتابی است اگر و تنها اگر گراف جهت دار متناظر با آن در هر راس دارای یک طوقه باشد (یک راس را به خودش وصل کند)

۲) یک رابطه متقارن است اگر و فقط اگر گراف جهت دار متناظر با آن دارای این ویژگی باشد که هرگاه از راسی مانند a به راسی مانند b یک یال موجود باشد آنگاه از راس b به راس a نیز یالی موجود باشد.

۳) یک رابطه پادمتقارن است اگر و تنها اگر گراف جهت دار متناظر با آن دارای این ویژگی باشد که هرگاه از راسی مانند a به راسی مانند b یک یال موجود باشد آنگاه از راس b به راس a یالی موجود نباشد.

۴) یک رابطه ترایایی است اگر و تنها اگر گراف جهت دار متناظر با آن اگر از راسی مانند a به راسی دیگر مانند b یک یال موجود باشد و از راس b به راسی مانند c یالی موجود باشد آنگاه از راس a به راس c نیز یک یال وجود داشته باشد. (گراف جهت دار شکل ۱ متناظر با رابطه ای

استقرای ریاضی

اگر p گزاره‌ای باشد درباره عددهای طبیعی N یعنی به ازای $n \in N$ ، $p(n)$ درست یا نادرست است

I) $p(1)$ درست است

II) $p(n+1)$ درست است اگر $p(n)$ درست باشد در اینصورت p به ازای هر عدد طبیعی درست است.

استقرای قوی

I) $p(1)$ درست است

II) $p(n)$ درست است هرگاه $p(k)$ به ازای همه مقادیر $1 \leq k \leq n$ درست باشد در اینصورت p به ازای هر عدد طبیعی درست است.

مثال: به کمک استقراء ثابت کنید $p(n): 1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$

I) $p(1)=1^2$

II) فرض کنیم $p(n)=1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$

گام بعدی ثابت می‌کنیم $p(n+1)=\underbrace{1+3+5+\cdots+(2n-1)}_{\text{از قبل برابر } n^2}+(2n+1)=(n+1)^2$

$p(n+1)=n^2+(2n+1)=(n+1)^2$ ∴

۱۱۲

Year. Month. Date. ( ) Subject :

مثال : ثابت کنید

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

I) $p(1)=1=\frac{1(1+1)}{2}$ قدم اول

II) $p(n)=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ قدم دوم

$$\underbrace{1+2+3+\cdots+n}_{\text{از قدم دوم}}+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$ قدم سوم : بایستی ثابت کنیم

$$\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=\frac{n^2+n+2n+2}{2}=\frac{n^2+3n+2}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

مثال : به کمک استقراء ثابت کنید .

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

I) $p(1)=1^2=\frac{1(1+1)(2(1)+1)}{6}$ قدم اول

II) $p(n)=1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ قدم دوم

$$p(n+1)=\underbrace{1^2+2^2+\cdots+n^2}_{\text{از قدم دوم}}+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$$

قدم سوم بایستی ثابت کنیم

۱۱۳

Year. Month. Date. ( ) Subject :

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2=\frac{(n+1)\left[2n^2+n+6(n+1)\right]}{6}$$

$$=\frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

$$=\frac{(n+1)(n+2)\left[2(n+1)+1\right]}{6}$$

مثال: به کمک استقرا ثابت کنید (برای $n\geq 0$)

$$p(n):\ 1+2+2^2+2^3+\dots+2^n=2^{n+1}-1$$

I) قدم اول: $p(1)=2^1-1=1$

II) قدم دوم: $p(n)=1+2+2^2+2^3+\dots+2^n=2^{n+1}-1$

قدم سوم: بایستی ثابت کنیم $p(n+1)=2^{n+2}-1$

به طرفین قدم دوم 2^{n+1} را اضافه می‌کنیم

$$1+2+2^2+2^3+\dots+2^n+2^{n+1}=\underbrace{2^{n+1}+2^{n+1}}-1=2(2^{n+1})-1$$

$$=2^{n+2}-1=p(n+1)$$

۱۱۴

Year. Month. Date. ( ) Subject :

مثال: به کمک استقرا ثابت کنید

$$1+4+7+\dots+(3n-2)=\frac{n(3n-1)}{2}$$

قدم اول: I) $p(1)=1=\frac{1(3(1)-1)}{2}$

قدم دوم: II) $1+4+7+\dots+(3n-2)=\frac{n(3n-1)}{2}$

قدم سوم: بایستی ثابت کنیم $p(n+1)=\frac{(n+1)[3(n+1)-1]}{2}$

به طرفین قدم دوم $[3(n+1)-2]=3n+1$ را اضافه می‌کنیم

$$1+4+7+\dots+(3n-2)+(3n+1)=\frac{n(3n-1)}{2}+(3n+1)$$

$$=\frac{3n^2-n+6n+2}{2}=\frac{3n^2+5n+2}{2}=\frac{(n+1)(3n+2)}{2}$$

$$=\frac{(n+1)[3(n+1)-1]}{2}$$

TALASH

مثال: رابطه $n! \geq 2^n$ را برای $n \geq 4$ ثابت کنید

قدم اول: اگر $n=4$ آنگاه $4! = 2^4 < \Rightarrow 16 = 6$

قدم دوم: اگر $n \geq 4$ آنگاه $n! \geq 2^n$

قدم سوم: بایستی برای $(n+1)!$ نیز نامساوی برقرار است

$$(n+1)! = (n!)(n+1) \geq 2^n (n+1) \geq 2^n (2) = 2^{n+1}$$

$$n \geq 4 \Rightarrow (n+1) > 2$$

مثال: رابطه $n^2 \geq 2n+1$ را برای $n \geq 3$ ثابت کنید

قدم اول: $n = 3 \Rightarrow 3^2 > 2(3)+1$

قدم دوم: $n^2 \geq 2n+1$ برای $n \geq 3$

قدم سوم: اگر برای $n+1$ بخواهیم رابطه را ثابت کنیم

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \geq (2n+1) + 2n + 1 \geq 2n + 2 + 1$$

از قدم دوم

$$= 2(n+1) + 1$$

۱۱۶

Year. Month. Date. ( ) Subject :

مثال: رابطه $2^n \geq n^2$ را برای $n \geq 4$ ثابت کنید

قدم اول: اگر $n=4$

$2^4 = 4^2 \Leftrightarrow 16=16$

قدم دوم: برای حالت n برقرار باشد

$2^n \geq n^2$

قدم سوم: برای حالت $(n+1)$ بایستی برقرار باشد

$2^{(n+1)} = 2(2^n) \geq n^2+n^2 \geq n^2+2n+1$

$2^{n+1} \geq (n+1)^2$

$n^2 \geq 2n+1$

$n^2-2n \geq 1$

$n^2-2n+1 \geq 1+1$

$(n-1)^2 \geq 2$ بدیهی

مطابق فرض $n \geq 4$ ، $n-1 \geq 3$ و $(n-1)^2 \geq 9$ لذا

$(n-1)^2 > 2$

TALASH

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$ به کمک استقرا ثابت کنید

$$f(n) = \frac{x^{n+1}-1}{x-1} \qquad (x \neq 1)$$

قدم اول: $I)\ f(1) = \frac{x^{1+1}-1}{x-1} = \frac{x^2-1}{x-1} = x+1 = \sum_{i=0}^{1} x^i$

قدم دوم: $II)\ f(n) = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$

قدم سوم: باید ثابت کنیم $f(n+1) = \sum_{i=0}^{n+1} x^i = \frac{x^{n+2}-1}{x-1}$

$$\sum_{i=0}^{n+1} x^i = \sum_{i=0}^{n} x^i + x^{n+1} = \frac{x^{n+1}-1}{x-1} + x^{n+1}$$

$$= \frac{x^{n+1}-1+(x-1)x^{n+1}}{(x-1)} = \frac{x^{n+1}-1+x \cdot x^{n+1} - x^{n+1}}{x-1} = \frac{x^{n+2}-1}{x-1}$$

نکات

$$1)\ \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$2)\ \sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$$

$$3)\ \sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3+2^3+\cdots+n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

منابع

۱ – ریاضیات گسسته پیش دانشگاهی

۲ – جبر واحتمال (سال سوم ریاضی)

۳ – ریاضیات گسسته (روزبه ترابی)

۴ – ریاضیات جدید (دوم ریاضی نظام قدیم)

۵ – ریاضیات جدید (سال اول متوسطه)

۶ – ریاضیات گسسته (سیمور لیپشوتس)

۷ – ریاضیات گسسته (دکتر اسماعیل بابلیان)

۸ – ریاضیات جدید (سوم ریاضی نظام قدیم)

۹ – ریاضیات گسسته (نادر جعفرنیا)

۱۰ – ریاضیات جدید (حمید رضا امیری)